基礎数学選書

10

群 と 表 現

信州大学教授
理学博士

横田一郎 著

裳 華 房

編 集 趣 旨

最近の科学技術の発展には誠に目覚しいものがあります．それにつれてその基礎であり，その手段である数学の重要性はますます増大しつつあります．

また一方，いままでは主として科学技術の方面にのみ応用をもっていると思われていた数学が，最近になって実は，人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってまいりました．

このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方ですので，大学における数学教育の比重はますます大きくなりつつあります．

しかしながら誠に残念なことに，大学の講義時間には大きな制限があるために，講義がややもすれば型通りになりがちで，学生の数も毎年増加の一途をたどっていますので，講義だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状です．

このような状態のもとで，大学の講義を十分に理解し，それを活用する力を十分に身につけるには，初学者の心理も盲点も知りつくしている経験豊かな著者の手になる懇切丁寧な参考書によるのが一番よい方法です．

ややもすれば，大学生相手の書物には読者をつきはなしたような態度が多いのですが，その点を改め，読者諸君が素直に読み進むことができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につき，理論に対する真の興味がわいてくるようにと念願して企画されたのが，この「基礎数学選書」であります．

本選書は，以上の趣旨に基づいて，数学の種々の分科を１つ１つ教科書風の堅苦しさから解放された自由な立場から，できるだけ詳細に解説するという目的で，比較的多くの小冊子に分けられています．

読者諸君は，この選書のうちから諸君が必要とされるもの，興味をもたれるものを自由に選ぶことができると思います．

編集委員会は，この選書に入れた項目で，将来数学を活用しようとする人たちに必要なものはほとんど網羅していると信じます．

また，将来それを活用する場合，数学はこの選書に解説されている内容で十分役立つと確信します．

したがって，これらの選書で学習し，それらを書棚においておかれるならば，社会にでて数学を活用する場合にも大いに役立つことを信じて疑わないものであります．

昭和44年8月

矢 野 健太郎
国 沢 清 典
茂 木 勇
石 原 繁
岩 堀 長 慶

まえがき

本書は「基礎数学選書」の趣旨にしたがって，わかり易く Lie 群の表現について解説した書である．内容は古典群 $U(n), SU(n), Sp(n), SO(n), Spin(n)$ および例外群の1部 G_2, F_4 の複素表現環の決定である．

Lie 群の表現環について，つぎの重要な定理がある．

「単連結なコンパクト Lie 群 G の複素表現環 $R(G)$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_n]$, $n=\mathrm{rank}\, G$ に環同型である」（[10] Theorem 6.41）

これを証明するには，Lie 群の表現を Lie 環の表現に帰着させたり，あるいは Lie 群の weight 理論に帰着させたりするのが普通である．それはすばらしく美しい理論であると思うと同時に，どうも抽象的な感じも強く，初めて学ぶ者にはかなり理解し難く，表現論とは群準同型写像 $G \to GL(n, K)$ を調べることであるという感じから遠くなってしまいがちである．さて本書では，そのような抽象的な方法は一切避けて，すべてを古典群および群 G_2, F_4 を通して具体的に取り扱っているので，各群のもつ個性的な構造がよくわかり，たとえ Lie 群について予備知識がなくても容易に理解できるようになっている．群論をはじめ数学を学んで抽象的だと思う人があれば，どうか本書を読んで，具体面においても数学はすばらしく興味深く構成されているのだということを読みとって頂きたいのである．ともあれ本書が，姉妹書「群と位相」とともに，読者に Lie 群または位相幾何学に対する興味をひきおこし，さらに高度の分野へ進む1つの手掛りをつかむことに少しでも役立つならば，これ以上の喜びはないのである．

以下簡単に各章の内容について触れておこう．目的は，4, 5 章にあって，1, 2, 3 章はその準備であると思って頂いてもよい．1章では代数的な基礎概念のほかに Clifford 多元環および不変積分について述べている．2章は群の表現についての一般論である．有限群の表現論について知識のある人は，有限群をコンパクト群に，和 Σ を積分 $\int$ におきかえると容易に理解できると思う．もちろん予備知識を何ら必要としないで読めるようにしてある．3章でトーラスの複素表

現環を求めて4，5章の準備とした．4，5章でそれぞれ古典群および群 G_2, F_4 の複素表現環の構造を決定し，その生成元を指定した．特に例外群 G_2, F_4 についてかかれた書がほとんどないので，できるだけ詳しくかいておいた．なお，これらの群の Lie 環についてもかなり詳しく述べておいたので，Lie 環を学ぶ人にも参考になるものと思う．

残りの3つの例外群 E_6, E_7, E_8 について本書では全く触れていない．というよりはむしろ，これらについて書く能力を私が持ちあわせていないという方が正しいかもしれない．（E_6 について本書のような具体的なやり方をやってみたいと思っているのだが…）．

本書を書くに際して，東京大学 岩堀長慶教授にいろいろ御指導いただいたことを私はまず感謝しなければならない．またこの原稿をゼミしながら校正を手伝ってくれた小寺裕，宮坂隆，山崎善俊氏の労に感謝し，さらに遠藤恭平，宇山寿恵両氏はじめ裳華房の皆々様に大そうお世話になったことを感謝している．最後にこの書を丹念に植字して下さった中央印刷株式会社の 原　公夫・五十嵐美恵子氏に敬意を表わし御礼申し上げる．

1973年4月

横　田　一　郎

追記：残りの3つの例外群 E_6, E_7, E_8 についても，（1982年現在）本書のような具体的な表示ができ上がっており，いろいろの性質もわかっている．いずれかの機会にこれらについて詳しく書きたいと思っている．（1982年11月）

目　　次

1. 準　　備

2. 群 の 表 現

3. 表　現　環

4. 古典群の表現環

5.　例外群 G_2, F_4 の表現環

1 準　備

群，環，体，多元環などの基礎概念を後で用いる範囲内で説明しておこう．たとえそれらが数学で常識なものであっても，できるだけ丁寧に述べることにした．なお＊印のある定義，命題は，その前にある定義，命題と同じ内容のいいかえに過ぎないことを意味している．

§1. 加　群

(1) 加　群

定義　集合 A の任意の2つの元 a, b に対して A の元 $a+b$ が1意に定まり，つぎの4つの条件

(1)　$a+b=b+a$

(2)　$a+(b+c)=(a+b)+c$

(3)　A に0とかかれる特定の元が存在し，A の任意の元 a に対して $a+0=a$ がなりたつ．

(4)　A の任意の元 a に対して $a+(-a)=0$ をみたす A の元 $-a$ が存在する．

がなりたつとき，A は**加群**であるという．0を加群 A の**零元**，$-a$ を a の**逆元**という．

例 1.1　整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}=\{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ は（和に関して）加群をつくる．この加群 $\boldsymbol{Z}$ を**整数加群**という．

定義　加群 A の空でない部分集合 B が

$$b, b' \in B \quad ならば \quad b-b' \in B$$

をみたすとき，B を A の**部分加群**という．

A を加群とし，B を A の部分加群とする．A において

$$a \sim a' \iff a-a' \in B$$

と定義すると，関係～は同値法則をみたす．この関係～により A を同値類に分けた等化

集合を A/B で表わし，元 $a\in A$ を含む類を $[a]$ とかくことにする．A/B において和を

$$[a]+[a']=[a+a']$$

と定義すると，A/B は加群になる．この加群 A/B を A の B による **剰余加群** という．

定義　A, B を加群とする．写像 $f\colon A\to B$ が

$$f(a+a')=f(a)+f(a') \qquad a,\ a'\in A$$

をみたすとき，f を **加群準同型写像** という．加群準同型写像 $f\colon A\to B$ が全単射であるとき，f を **加群同型写像** という．2つの加群 A, B の間に加群同型写像 $f\colon A\to B$ が存在するとき，A と B は **加群同型** であるといい，記号 $A\cong B$ で表わす．

定義　A, B を加群とする．A, B の直積集合 $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$ において和を

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',\ b+b')$$

と定義すると，$A\times B$ は加群になる．この加群を $A\oplus B$ で表わし，A と B の **直和** という．

直和は2つと限らず，任意個数の加群に対しても定義できる．すなわち $A_s,\ s\in S$ を加群とするとき，集合

$$\bigoplus_{s\in S}A_s=\left\{(\cdots,a_s,\cdots)\,\middle|\,\begin{array}{l}a_s\in A_s,\ \text{ただし}\ (\cdots,a_s,\cdots)\ \text{の成分}\\ a_s\ \text{は有限個の}\ s\ \text{を除いて}\ a_s=0\ \text{とする}\end{array}\right\}$$

において和を

$$(\cdots,a_s,\cdots)+(\cdots,a_s',\cdots)=(\cdots,a_s+a_s',\cdots)$$

と定義すると，$\bigoplus_{s\in S}A_s$ は加群になる．この加群 $\bigoplus_{s\in S}A_s$ を $A_s,\ s\in S$ の **直和** という．

定義　S を集合とする．形式的な有限和

$$\sum m_s s \qquad m_s\in \boldsymbol{Z},\ s\in S$$

(記号 $\sum m_s s$ において，有限個の s を除いて $m_s=0$ であり，また2つの $\sum m_s s$, $\sum n_s s$ が等しいとは，すべての $s\in S$ に対して $m_s=n_s$ であると約束する) 全体の集合を $F(S)$ とする．$F(S)$ において和を

$$\sum m_s s+\sum n_s s=\sum (m_s+n_s)s$$

と定義すると，$F(S)$ は加群になる．この加群 $F(S)$ を，集合 S の各元を **基とする自由加群** という．自由加群 $F(S)$ は，集合 S の濃度個数の整数加群 $\boldsymbol{Z}$ の直和に加群同型である．

定義*　X を加群とし，A, B を X の部分加群とする．X がつぎの2つの条件

（1）X の任意の元 x は $x=a+b$, $a\in A$, $b\in B$ と表わされる．

（2）$a+b=0$, $a\in A$, $b\in B$ ならば $a=b=0$ である．

をみたすとき，X は A と B の**直和**であるといい，$X=A\oplus B$ で表わす．

定義* X を加群とする．X につぎの2つの条件をみたす部分集合 $\{u_s, s\in S\}$ が存在したとする．

（1）X の任意の元 x は $x=\sum m_s u_s$, $m_s\in \boldsymbol{Z}$（ただし有限個の $s\in S$ を除いて $m_s=0$ とする）と表わされる．

（2）$\sum m_s u_s=0$, $m_s\in \boldsymbol{Z}$ ならば，すべての $s\in S$ に対して $m_s=0$ である．

このとき X は u_s, $s\in S$ を**基とする自由加群**であるという．

自由加群 A においては，元 $a\in A$ が $na=0$, $n\in \boldsymbol{Z}$（特に $2a=0$）ならば，実は $a=0$ であることを注意しておく．

注意　上に述べた直和の2通りの定義が示すように，直和には，加群 A, B から新しい加群 $A\oplus B$ を構成する方法と，与えられた加群 X をその部分加群 A, B の直和 $X=A\oplus B$ に分解する方法とがある．この2つの定義は（加群同型の意味において）本質的には同じものである．あとで K-加群，K-多元環，G-K-加群などにおいても直和の定義を与えるが，いちいちこのように2通りの定義を与えないで，1つの定義を与えるだけにとどめることにした．

（2）半加群と普遍加群

自然数から整数を構成する方法を拡張して，半加群 M から加群 $A(M)$ を構成する方法について述べよう．

定義　集合 M の任意の2つの元 a, b に対して M の元 $a\oplus b$ が1意に定まり，つぎの3つの条件

（1）$a\oplus b=b\oplus a$

（2）$a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$

（3）M に0とかかれる特定の元が存在し，M の任意の元 a に対して $a\oplus 0=a$ がなりたつ．

がなりたつとき，M は**半加群**であるという．加群は明らかに半加群である．

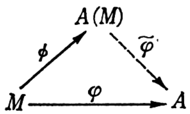
例 1.2　0および自然数全体の集合 $N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ は（和に関して）半加群をつくる．

定義　M, N を半加群とする．写像 $f\colon M\to N$ が

$$f(0)=0,\ f(a\oplus b)=f(a)\oplus f(b) \qquad a, b\in M$$

をみたすとき，f を**半加群準同型写像**という．半加群準同型写像 $f: M \to N$ が全単射であるとき，f を**半加群同型写像**という．2つの半加群 M, N の間に半加群同型写像 $f: M \to N$ が存在するとき，M と N は**半加群同型**であるという．

定義 M を半加群とする．$(A(M), \phi)$（単に $A(M)$）が M の**普遍加群**（または **Grothendieck 加群**）であるとは，つぎの3つの条件をみたすことである．



（1） $A(M)$ は加群である．

（2） $\phi: M \to A(M)$ は半加群準同型写像である．

（3） 任意の加群 A と任意の半加群準同型写像 $\varphi: M \to A$ に対して

$$\varphi = \tilde{\varphi}\phi$$

をみたす加群準同型写像 $\tilde{\varphi}: A(M) \to A$ がただ1つ存在する．

命題 1.1 M を半加群とするとき，つぎの (1) (2) がなりたつ．

（1） M の普遍加群 $(A(M), \phi)$ は存在し，かつ普遍加群 $A(M)$ は加群の同型†を除いて1意に定まる．

（2） $A(M)$ の元 z は，ある $a, b \in M$ を用いて $z = \phi(a) - \phi(b)$ と表わされる．

証明 まず M の普遍加群 $(A(M), \phi)$ が存在することを示そう．直積集合 $M \times M$ において

$$(a, b) \sim (a', b') \iff \begin{array}{l} a \oplus x = a' \oplus y,\ b \oplus x = b' \oplus y \\ \text{をみたす } x, y \in M \text{ が存在する} \end{array}$$

と定義すると，関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係 $\sim$ により $M \times M$ を同値類に分けた等化集合 $(M \times M)/\sim$ を $A(M)$ で表わす：

$$A(M) = (M \times M)/\sim$$

元 $(a, b) \in M \times M$ を含む類を $[a, b]$ とかくことにし，$A(M)$ において和を

$$[a, b] + [c, d] = [a \oplus c, b \oplus d]$$

と定義すると，$A(M)$ は加群になる．実際，$A(M)$ の零元は $[0, 0]$ であり，$[a, b]$ の逆元 $-[a, b]$ は $[b, a]$ である．写像 $\phi: M \to A(M)$ を

---

† この加群同型は，つぎに示すようなもっと強い意味でなりたっている．「$(A(M), \phi)$, $(A'(M), \phi')$ を半加群 M の2つの普遍加群とするとき，$\phi' = f\phi$ をみたす加群同型写像 $f: A(M) \to A'(M)$ がただ1つ存在する」．あとで，テンソル積 K-加群，テンソル K-多元環，外積 K-多元環，Clifford K-多元環に対しても同じような考察をするが，同型という意味は $\phi' = f\phi$ の条件を含めて同型ということである．しかし，それらをかかないで，すべて省略することにした．

$$\phi(a) = [a, 0]$$

と定義すると ϕ は半加群準同型写像であって，かつ $A(M)$ の元 $[a, b]$ は

$$[a, b] = [a, 0] + [0, b] = [a, 0] - [b, 0] = \phi(a) - \phi(b)$$

と表わされる．つぎに加群 A と半加群準同型写像 $\varphi\colon M \to A$ が与えられたとしよう．このとき写像 $\tilde{\varphi}\colon A(M) \to A$ を

$$\tilde{\varphi}([a, b]) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

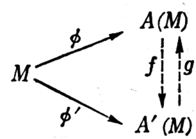
と定義すると $\tilde{\varphi}$ は加群準同型写像であって

$$\varphi(a) = \tilde{\varphi}\phi(a) \qquad a \in M$$

をみたしている．φ に対してこの加群準同型写像 $\tilde{\varphi}$ がただ1つに定まることは，$\tilde{\varphi}$ が $\varphi = \tilde{\varphi}\phi$ をみたせば

$$\tilde{\varphi}([a, b]) = \tilde{\varphi}(\phi(a) - \phi(b)) = \tilde{\varphi}\phi(a) - \tilde{\varphi}\phi(b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$

より定まってしまうからである．最後に M の普遍加群が加群の同型を除いて1意に定まることを示そう．$(A(M), \phi)$,$(A'(M), \phi')$ を M の2つの普遍加群とする．$(A(M), \phi)$ が普遍加群であるから，半加群準同型写像 $\phi'\colon M \to A'(M)$ に対して $\phi' = f\phi$ をみたす加群準同型写像 $f\colon A(M) \to A'(M)$ が存在する．同様に半加群準同型写像 $\phi\colon M \to A(M)$ に対して $\phi = g\phi'$ をみたす加群準同型写像 $g\colon A'(M) \to A(M)$ が存在する．このとき



$$gf\phi = g\phi' = \phi = 1^{\dagger}\phi$$

となるから，1意性より $gf = 1$ がなりたつ．同様に $fg = 1$ もなりたつから f は加群同型写像である．よって $A(M)$ と $A'(M)$ は加群同型である．

例 1.3　半加群 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ (例1.2) の普遍加群 $A(N)$ は整数加群 $\boldsymbol{Z} = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ に加群同型である．

例 1.4　加群 A の普遍加群は A 自身 (詳しくは $(A, 1)$, $1\colon A \to A$ は恒等写像) である．

注意　半加群 M の普遍加群 $(A(M), \phi)$ の作り方として，つぎの方法もよく用いられるので述べておこう．M の各元を基とする自由加群を $F(M)$ とする．$F(M)$ において

$$a \oplus b - a - b \qquad a, b \in M$$

---

† $1\colon A(M) \to A(M)$ は恒等写像：$1(a) = a$, $a \in A(M)$ である．以後，恒等写像はつねに1で表わすことにする．

の形の元全体から生成される部分加群[†]を $I(M)$ とし，剰余加群

$$A(M) = F(M)/I(M)$$

をつくる．元 $a \in M$ を含む類を $\phi(a)$ とすると，ϕ: $M \to A(M)$ は半加群同型写像である．このとき $(A(M), \phi)$ は M の普遍加群になっている．

補題 1.2　M を半加群とし，$(A(M), \phi)$ を M の普遍加群とする．A を加群とし，半加群準同型写像 φ: $M \to A$ が単射であれば，$\varphi = \bar{\varphi}\phi$ をみたす加群準同型写像 $\bar{\varphi}$: $A(M) \to A$ も単射である．

証明　$z \in A(M)$ が $\bar{\varphi}(z) = 0$ とする．z は $z = \phi(a) - \phi(b), a, b \in M$ と表わされる（命題 1.1 (2)）ので，$0 = \bar{\varphi}(z) = \bar{\varphi}(\phi(a) - \phi(b)) = \varphi(a) - \varphi(b)$ より $\varphi(a) = \varphi(b)$ となる．φ は単射であるから $a = b$ である．よって $z = \phi(a) - \phi(b) = 0$ となる．これは $\bar{\varphi}$ が単射であることを示している．

§2. 環

(1) 環

定義　集合 R の任意の 2 つの元 a, b に対し 2 つの算法 $a + b \in R$, $ab \in R$ が定義されていて，R は算法 $a + b$ に関して加群であり，さらにつぎの 2 つの条件

(1)　$a(bc) = (ab)c$

(2)　$a(b+c) = ab + ac$,　　$(b+c)a = ba + ca$

がなりたつとき，R は環であるという．さらに

(3)　R に 1 とかく特定の元 $(1 \neq 0)$ が存在し，R の任意の元 a に対して $1a = a1 = a$ がなりたつ．

をみたすとき，R を**単位元 1 をもつ環**という．また環 R の任意の 2 つの元 a, b に対して

(4)　$ab = ba$

がなりたつとき，R を**可換環**という．

本書で取り扱う環はすべて単位元 1 をもつ環である．

例 1.5　整数全体の集合 $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ は（和と積に関して）単位

---

† A を加群とし，S を A の部分集合とする．S を含む最小の A の部分加群 B を S より**生成される部分加群**（または S は B を**生成する**）という．加群 A を環，K- 加群，K- 多元環，群等におきかえても，生成するということは同様に（S を含む最小の…と）定義される．

元1をもつ可換環をつくる．この環 $\boldsymbol{Z}$ を**整数環**という．

定義 環 R の部分加群 $\mathfrak{a}$ が

$$a, b \in \mathfrak{a} \quad \text{ならば} \quad ab \in \mathfrak{a}$$

をみたすとき，$\mathfrak{a}$ を R の**部分環**という．環 R の部分環 $\mathfrak{a}$ がさらに

$$x \in R,\ a \in \mathfrak{a} \quad \text{ならば} \quad xa \in \mathfrak{a},\ ax \in \mathfrak{a}$$

をみたしているとき，$\mathfrak{a}$ を R の**両側イデアル**，または単に**イデアル**という．

R を環とし，$\mathfrak{a}$ を R のイデアルとする．R を加群，$\mathfrak{a}$ を R の部分加群とみなしての剰余加群 $R/\mathfrak{a}$ において積を

$$[a][b] = [ab]$$

と定義すると，$R/\mathfrak{a}$ は環になる．この環 $R/\mathfrak{a}$ を R の $\mathfrak{a}$ による**剰余環**という．R が単位元1をもつ可換環であれば，$R/\mathfrak{a}$ も単位元 $[1]$ をもつ可換環になる．

定義 R, R' を環とする．加群準同型写像 $f\colon R \to R'$ が

$$f(ab) = f(a)f(b) \qquad a, b \in R$$

をみたすとき，f を**環準同型写像**という．R, R' がともに単位元1をもつときには，環準同型写像 $f\colon R \to R'$ はつねに

$$f(1) = 1$$

をみたすことを要求するものとする．環準同型写像 $f\colon R \to R'$ が全単射であるとき，f を**環同型写像**という．2つの環 R, R' の間に環同型写像 $f\colon R \to R'$ が存在するとき，R と R' は**環同型**であるといい，記号 $R \cong R'$ で表わす．

(2) 多項式環

R を単位元1をもつ可換環とする．加群 R の可算無限個の直和 P において積を

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1, a_2, \cdots)\ (b_0, b_1, b_2, \cdots)\\ &\quad = (a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \cdots, \sum_{i+j=n} a_ib_j, \cdots)\end{aligned}$$

と定義すると，P は単位元 $1 = (1, 0, 0, \cdots)$ をもつ可換環になる．$(a, 0, 0, \cdots)$ を単に a で表わし，また $(0, 1, 0, \cdots)$ を x で表わすと

$$(0, \cdots, 0, \overset{i+1}{1}, 0, \cdots) = x^i$$

$$(0, \cdots, 0, \overset{i+1}{a}, 0, \cdots) = (a, 0, \cdots)\ (0, \cdots, 0, \overset{i+1}{1}, 0, \cdots) = ax^i$$

となるので，P の元 $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ は

$$
\begin{aligned}
&(a_0, a_1, a_2, \cdots) \\
&\quad = (a_0, 0, 0, \cdots) + (0, a_1, 0, \cdots) + (0, 0, a_2, 0, \cdots) + \cdots \\
&\quad = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \qquad \text{(有限和)}
\end{aligned}
$$

と1意に表わされる．このようにしてつくられた環 P を $R[x]$ で表わし，R に係数をもつ**変数 x の多項式環**という．環 R の代りに環 $R[x_1]$ を用いると，$R[x_1]$ に係数をもち変数 x_2 の多項式環 $(R[x_1])[x_2]$ をつくることができる．帰納的に環 $R[x_1, \cdots, x_n]$ を $(R[x_1, \cdots, x_{n-1}])[x_n]$ で定義し，この環 $R[x_1, \cdots, x_n]$ を R に係数をもつ**変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式環**という．$R[x_1, \cdots, x_n]$ の元 $p = p(x_1, \cdots, x_n)$ は

$$
p = \sum a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \qquad a_{i_1\cdots i_n} \in R,\ i_1 \geqq 0, \cdots, i_n \geqq 0
$$

$(x_i^0 = 1$ と約束する）と1通りに表わされる．p に現われる0と異なる係数 $a_{i_1\cdots i_n}$ のうちで，$i_1 + \cdots + i_n$ のとる最大値 k を p の**次数**といい，p を次数 k の（変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する）**多項式**という．本書では，R として整数環 $\boldsymbol{Z}$（例1.5）を用いた多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を取り扱うことが多い．

いま多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ の定義を構成的に述べたが，逆に与えられた環が多項式環に環同型になるための条件を述べておこう．R を単位元1をもつ可換環とする．R に元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が存在して，R の各元が

$$
\sum a_{i_1\cdots i_n} \lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n} \qquad a_{i_1\cdots i_n} \in \boldsymbol{Z},\ i_1 \geqq 0, \cdots, i_n \geqq 0
$$

と1通りに表わされるならば，R は先に定義した多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ に環同型となる．このときにも $R = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ と表わし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は（$\boldsymbol{Z}$ 上）**代数的独立**であるという．すなわち，$\lambda_1 \cdots, \lambda_n$ が代数的独立であるとは，$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$ をみたす多項式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ が0以外に存在しないことである．

多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n]$ において，n 個の元 $x_1y_1 - 1, \cdots, x_ny_n - 1$ より生成されるイデアルを $(x_1y_1 - 1, \cdots, x_ny_n - 1)$ とし，このイデアルによる剰余環を $\boldsymbol{Z}[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}]$ で表わす：

$$
\boldsymbol{Z}[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}] = \boldsymbol{Z}[x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n]/(x_1y_1 - 1, \cdots, x_ny_n - 1)
$$

$\boldsymbol{Z}[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_n, x_n^{-1}]$ の元は（上式の右辺において x_i を含む類を同じ記号 x_i で表わすことにすれば）

$$
\sum a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \qquad a_{i_1\cdots i_n} \in \boldsymbol{Z},\ i_1, \cdots, i_n \in \boldsymbol{Z}
$$

と1通りに表わされる．同様に $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, y_n]$ において元 $x_ny_n - 1$ より生成されるイデアルを $(x_ny_n - 1)$ として，剰余環

$$\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_n^{-1}] = \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, y_n]/(x_n y_n - 1)$$

をつくると，その元は

$$\sum a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \qquad a_{i_1 \cdots i_n} \in \boldsymbol{Z},\ i_1 \geqq 0, \cdots, i_{n-1} \geqq 0, i_n \in \boldsymbol{Z}$$

と1通りに表わされる．

(3) 半環と普遍環

定義 集合 M の任意の2つの元 a, b に対し2つの算法 $a \oplus b \in M$, $a \otimes b \in M$ が定義されていて，M は算法 $a \oplus b$ に関して半加群であり，さらにつぎの4つの条件

(1) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

(2) $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

(3) M に1とかく特定の元 $(1 \neq 0)$ が存在し，M の任意の元 a に対して $a \otimes 1 = a$ がなりたつ．

(4) $a \otimes b = b \otimes a$

がなりたつとき，M は**単位元1をもつ可換半環**であるという．単位元1をもつ可換環は明らかに単位元1をもつ可換半環である．

例 1.6 0および自然数全体の集合 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は（和と積に関して）単位元1をもつ可換半環をつくる．

定義 M, N を単位元1をもつ可換半環とする．半加群準同型写像 $f: M \to N$ が

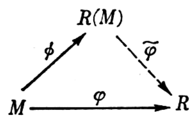
$$f(1) = 1, \qquad f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \qquad a, b \in M$$

をみたすとき，f を**半環準同型写像**という．半環準同型写像 $f: M \to N$ が全単射であるとき，f を**半環同型写像**という．単位元1をもつ2つの可換半環 M, N の間に半環同型写像 $f: M \to N$ が存在するとき，M と N は**半環同型**であるという．

定義 M を単位元1をもつ可換半環とする．$(R(M), \phi)$（単に $R(M)$）が M の**普遍環**（または **Grothendieck 環**）であるとは，つぎの3つの条件をみたすことである．

(1) $R(M)$ は単位元1をもつ可換環である．

(2) $\phi: M \to R(M)$ は半環準同型写像である．



(3) 任意の単位元1をもつ可換環 R と任意の半環準同型写像 $\varphi: M \to R$ に対して

$$\varphi = \tilde{\varphi}\phi$$

をみたす環準同型写像 $\tilde{\varphi}: R(M) \to R$ がただ1つ存在する．

命題 1.3 M を単位元1をもつ可換半環とするとき，M の普遍環 $(R(M), \phi)$ は存在

し，かつ普遍環 $R(M)$ は環の同型を除いて1意に定まる．

証明　命題1.1の証明と同じ記号を用いる．加群 $R(M)=(M\times M)/\sim$ において積を

$$[a, b][c, d]=[(a\otimes c)\oplus(b\otimes d), (b\otimes c)\oplus(a\otimes d)]$$

と定義すると，$R(M)$ は単位元 $1=[1, 0]$ をもつ可換環になる．このとき写像 $\phi: M\to R(M)$, $\phi(a)=[a, 0]$ は半環準同型写像になっている．さらに単位元 1 をもつ可換環 R と半環準同型写像 $\varphi: M\to R$ に対して，写像 $\tilde{\varphi}: R(M)\to R$, $\tilde{\varphi}([a, b])=\varphi(a)-\varphi(b)$ は $\varphi=\tilde{\varphi}\phi$ をみたすただ1つの環準同型写像である．また $R(M)$ が環同型を除いて1意に定まることの証明は，命題1.1の後半と同様にするとよい．

例 1.7　半環 $N=\{0, 1, 2, \cdots\}$（例1.6）の普遍環 $R(N)$ は整数環 $\boldsymbol{Z}$ に環同型である．

§3. 体

定義　単位元1をもつ環 K において条件

（1）K の0と異なる任意の元 a に対して $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ をみたす K の元 a^{-1} が存在する．

がなりたつとき，K は**体**であるという．さらに体 K が環として可換であるとき，すなわち任意の $a, b\in K$ に対して

（2）$ab=ba$

がなりたつとき，K を**可換体**という．

例 1.8　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は（和と積に関して）可換体をつくる．この体 $\boldsymbol{R}$ を**実数体**という．

例 1.9　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}=\{\alpha=a+b\boldsymbol{i}\,|\,a, b\in\boldsymbol{R}, \boldsymbol{i}^2=-1\}$ は（和と積に関して）可換体をつくる．この体 $\boldsymbol{C}$ を**複素数体**という．

例 1.10　4元数全体の集合 $\boldsymbol{H}=\{\alpha=a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}\,|\,a, b, c, d\in\boldsymbol{R}, \boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1, \boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk}=-\boldsymbol{kj}=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki}=-\boldsymbol{ik}=\boldsymbol{j}\}$ は体をつくる．この体 $\boldsymbol{H}$ を**4元数体**という．$\boldsymbol{H}$ は可換体でない．

約束　本書では，つねに K で実数体 $\boldsymbol{R}$ か複素数体 $\boldsymbol{C}$ のいずれか1つを表わすものと約束する：$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$.

注意　複素数を係数にもついかなる代数方程式も複素数の範囲で必らず根をもつということ（この事実を複素数体は**代数的閉体**であるという）は，複素数体 $\boldsymbol{C}$ がもつ非常

に重要な性質である．「方程式 $x^2+1=0$ は実根をもたない」の例が示すように，実数体 $\boldsymbol{R}$ はこのような性質をもっていない．群の表現論を考えるとき，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の表現論に比べると，実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の表現論の方が大きい困難をともない難かしくなるのは，実数体 $\boldsymbol{R}$ が代数的閉体でないということに原因するようである（補題2.32参照）．本書では，表現論は主として複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上で述べるが，実数体 $\boldsymbol{R}$ 上でもなりたつ箇所も数多くあるので，$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ 両方でなりたつ個所は体を K とかいて，なるべく一般にして述べておいた．4元数体 $\boldsymbol{H}$ 上の表現については本書では全く触れていないが，これについては [10] を参照されたい．

§4. K-加　群

(1) K-加　群

定義　集合 V の任意の2つの元 u, v に対し和 $u+v\in V$ が定義されていて，この和に関して V は加群であり，さらに V の任意の元 u と K の任意の元 α に対して V の元 $u\alpha$ が1意に定まり，つぎの4つの条件

（1）　$(u\alpha)\beta=u(\alpha\beta)$

（2）　$u(\alpha+\beta)=u\alpha+u\beta$　　$u, v\in V, \alpha, \beta\in K$

（3）　$(u+v)\alpha=u\alpha+v\alpha$

（4）　$u1=u$　　$1\in K$

がなりたつとき，V を **K-加群**（または**体 K の上のベクトル空間**）という．

K-加群 V の部分加群 W が

$$u\in W, \alpha\in K \quad ならば \quad u\alpha\in W$$

をみたすとき，W を V の **部分 K-加群** という．

V を K-加群とし，W を V の部分 K-加群とする．剰余加群 V/W において $\alpha\in K$ の作用を

$$[u]\alpha=[u\alpha]$$

と定義すると，V/W は K-加群になる．この K-加群 V/W を V の W による **剰余 K-加群** という．

定義　V, V' を K-加群とする．加群準同型写像 f: $V\to V'$ が

$$f(u\alpha)=f(u)\alpha \qquad u\in V, \alpha\in K$$

をみたすとき，f を **K-(加群) 準同型写像** という．K-準同型写像 f: $V\to V'$ が全

単射であるとき，f を **K-(加群)同型写像**という．2つの K-加群 V, V' の間に K-同型写像 $f: V \to V'$ が存在するとき，V と V' は **K-(加群)同型**であるといい，記号 $V \cong V'$ で表わす．

K-加群 V の元 $u_1, \cdots, u_n$ に対して

$$u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n = 0 \qquad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$$

がなりたつのは $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ に限るとき，$u_1, \cdots, u_n$ は **(K-) 1次独立**であるという．

定義 K-加群 V において，つぎの2つの条件をみたす有限個の元 $u_1, \cdots, u_n$ が存在したとする．

(1) $u_1, \cdots, u_n$ は1次独立である．

(2) V の任意の元 u は $u = u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n$ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K)$ と表わされる．

このとき，この n 個の元 $u_1, \cdots, u_n$ を V の **(K-)基**という．V の基のとり方は1通りでないが，V にどのような基 $v_1, \cdots, v_m$ をとっても $m = n$ であることが示される ([21] 命題9)．すなわち V の基をつくる元の個数 n は一定である．よって，この n を V の**次元**といい，$\dim_K V = n$ で表わす．また零元0のみからなる K-加群0の次元は0であると約束しておく：$\dim_K 0 = 0$.

例 1.11 実数体 $\boldsymbol{R}$ は1次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．複素数体 $\boldsymbol{C}$ は2次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，かつ1次元 $\boldsymbol{C}$-加群である．4元数体 $\boldsymbol{H}$ は4次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，かつ2次元 $\boldsymbol{C}$-加群である．

例 1.12 $F = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．F の元を成分にもつ n 次元ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 全体の集合 F^n において和を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

と定義すると，F^n は加群になる．つぎに F^n において $\alpha \in K$ の作用を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}$$

と定義すると，F^n は K-加群になる．($\alpha \in F$ のときでも，$\begin{pmatrix} a_1\alpha \\ \vdots \\ a_n\alpha \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\alpha$, $\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$ を

$\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とかくことがある). $\boldsymbol{R}^n$ は n 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群であり, $\boldsymbol{C}^n$ は n 次元 $\boldsymbol{C}$ - 加群である. 実際, それぞれの基として n 個の元 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶことができるからである. この基 $e_1, \cdots, e_n$ をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^n$ の **標準基** ということにする. また $\boldsymbol{C}^n$ は $2n$ 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群である. 実際, $2n$ 次元であることは, $\boldsymbol{R}$ - 基として $2n$ 個の元 $e_1, e_1\boldsymbol{i}, \cdots, e_n, e_n\boldsymbol{i}$ を選ぶことができるからである. このように $\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ - 加群とみるときには $\boldsymbol{C}^n$ を $(\boldsymbol{C}^n)_{\boldsymbol{R}}$ で表わすことにする. 同様に $\boldsymbol{H}^n$ は $2n$ 次元 $\boldsymbol{C}$ - 加群である. それは $\boldsymbol{H}^n$ の $\boldsymbol{C}$ - 基として $2n$ 個の元 $e_1, e_1\boldsymbol{j}, \cdots, e_n, e_n\boldsymbol{j}$ を選ぶことができるからである. $\boldsymbol{H}^n$ を $\boldsymbol{C}$ - 加群とみるときには $(\boldsymbol{H}^n)_{\boldsymbol{C}}$ とかくことにする. 本書では用いないが, $\boldsymbol{H}^n$ は $4n$ 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群 ($(\boldsymbol{H}^n)_{\boldsymbol{R}}$ とかく) にもなっている.

例 1.13　$F = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする. F の元を成分にもつ (m, n) - 型行列 $\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ とも略記する) 全体の集合 $M(m, n, F)$ において和と $\alpha \in K$ の作用をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_{ji} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{ji} \end{pmatrix}\alpha = \begin{pmatrix} a_{ji}\alpha \end{pmatrix}$$

と定義すると, $M(m, n, F)$ は K - 加群になる. ($\alpha \in F$ のときでも, $\begin{pmatrix} a_{ji}\alpha \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a_{ji} \end{pmatrix}\alpha$, $\begin{pmatrix} \alpha a_{ji} \end{pmatrix}$ を $\alpha\begin{pmatrix} a_{ji} \end{pmatrix}$ とかくことがある). $M(m, n, K)$ は mn 次元 K - 加群である. 実際, E_{ji} を (j, i)- 成分だけが 1 で, 他の成分がすべて 0 である (m, n)- 型行列とする (E_{ii} を単に E_i とかくこともある) と, E_{ji}, $j = 1, \cdots, m$, $i = 1, \cdots, n$ は $M(m, n, K)$ の基になるからである. また $M(m, n, \boldsymbol{C})$ は $2mn$ 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群である. $M(m, n, \boldsymbol{H})$ は $4mn$ 次元 $\boldsymbol{R}$ - 加群であり, $2mn$ 次元 $\boldsymbol{C}$ - 加群でもある. なお $m = n$ のときがよく用いられるので, 以後 $M(n, n, F)$ を単に $M(n, F)$ で表わすことにする.

つぎの補題は, K - 準同型写像 f: $V \to W$ が K - 同型写像であるかどうかを確かめるのに有用である.

補題 1.4　V, W を次元の等しい 2 つの有限次元 K - 加群とし, f: $V \to W$ を K - 準同型写像とする. このとき, つぎの 3 つの条件は同値である.

(1)　f は単射である.

（2） fは全射である.

（3） f は K-同型写像である.

（[21] 補題12). 特に V, W をともに n 次元 K-加群とし, $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_n$ をそれぞれ V, W の基とする. このとき $f(u_i) = w_i, i = 1, \cdots, n$ をみたす K-準同型写像 $f: V \to W$ は K-同型写像である.

最後に内積について少し述べておこう.

定義 K-加群 V の任意の2つの元 u, v に対して K の元 (u, v) が1意に定まり, つぎの5つの条件

（1） $\overline{(v, u)} = (u, v)$

（2） $(u+u', v) = (u, v) + (u', v) \qquad u, u', v \in V$

（3） $(u, v\alpha) = (u, v)\alpha \qquad \alpha \in K$

（4） $(u, u) \geqq 0$

（5） $(u, u) = 0$ ならば $u = 0$

をみたすとき, Vを**内積をもつK-加群**という. (u, v) を u, v の**内積**という.

内積をもつ K-加群 V の元 $e_1, e_2, e_3, \cdots$ が

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}^{\dagger} \qquad i, j = 1, 2, \cdots$$

をみたすとき, $e_1, e_2, \cdots$ を Vの**正規直交系**という.

例 1.14 K-加群 K^n（例1.12）において, 2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の内積を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \bar{a}_1 b_1 + \cdots + \bar{a}_n b_n$$

で与えると, K^n は内積をもつ K-加群になる. このとき標準基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は K^n の正規直交基になっている. 一般に V を有限次元 K-加群とするとき, V に内積を定義して, Vを内積をもつ K-加群にすることができることを示そう. 実際, V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり, 2つの元 $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} u_i \beta_i$ $(\alpha_i, \beta_i \in K)$ の内積を

$$(u, v) = \bar{\alpha}_1 \beta_1 + \cdots + \bar{\alpha}_n \beta_n$$

と定義するとよい. この内積は V に固有のものではなく, V の基のとり方に関係している.

（2） K-加群の直和

† 記号 δ_{ij} は $i \neq j$ ならば $\delta_{ij} = 0$, $i = j$ ならば $\delta_{ij} = 1$ を意味する.

定義　V, W を K-加群とする．V, W の加群としての直和 $V \oplus W$ において $\alpha \in K$ の作用を

$$(u, w)\alpha = (u\alpha, w\alpha) \qquad u \in V, w \in W$$

と定義すると，$V \oplus W$ は K-加群になる．この K-加群 $V \oplus W$ を V と W の**直和**という．

命題 1.5　K-加群の同型類全体の集合は直和 $\oplus$ に関して半加群をつくる．すなわち K-加群 V, W, U に対して，つぎの K-加群の同型が存在する．

（1）　$V \oplus W \cong W \oplus V$

（2）　$V \oplus (W \oplus U) \cong (V \oplus W) \oplus U$

（3）　$V \oplus 0 \cong V$

補題 1.6　V, W を有限次元 K-加群とし，$u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_m$ をそれぞれ V, W の基とする．このとき

$$(u_1, 0), \cdots, (u_n, 0), (0, w_1), \cdots, (0, w_m)$$

は $V \oplus W$ の基になる．特に $V \oplus W$ は $n+m$ 次元（K-加群）である：

$$\dim_K (V \oplus W) = \dim_K V + \dim_K W$$

例 1.15　有限次元 K-加群の K-同型類全体の集合 M_K は直和 $\oplus$ に関して半加群をつくる（命題1.5，補題1.6）．そして，M_K は0および自然数全体の集合 N のつくる半加群（例1.2）に半加群同型である．実際，2つの有限次元 K-加群 V, W が K-同型であるための条件は，それらの次元が等しいことである（[21] 補題10）ことに注意して，写像 $f: M_K \to N$ を

$$f([V]) = \dim_K V \qquad [V] \text{ は } V \text{ を含む } K\text{-同型類}$$

と定義すると，f は半加群準同型写像になる（補題1.6）．したがって半加群 M_K の普遍加群 $A(M_K)$ は整数加群 $\boldsymbol{Z}$ に加群同型である（例1.3）：$A(M_K) \cong \boldsymbol{Z}$.

直和には上記のほかにもう1つの定義があった（3頁の注意）が，念のためそれをかいておこう．

定義*　V を K-加群とし，V_1, V_2 を V の部分 K-加群とする．V がつぎの2つの条件

（1）　V の任意の元 u は $u = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ と表わされる．（このとき $V = V_1 + V_2$ で表わし，V は V_1 と V_2 の**和**であるという）．

（2）　$v_1 + v_2 = 0$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ ならば $v_1 = v_2 = 0$ である．

をみたすとき，V は V_1 と V_2 の**直和**であるといい，$V = V_1 \oplus V_2$ で表わす．

補題 1.7　(1)　V を K-加群とし，K-準同型写像 $f: V \to V$ が $ff = 1$ をみたしているとする．このとき

$$V^+ = \{u \in V \mid f(u) = u\},\ V^- = \{u \in V \mid f(u) = -u\}$$

はともに V の部分 K-加群であり，V はV^+ と V^- の直和になる：

$$V = V^+ \oplus V^-$$

(2)　V を $\boldsymbol{C}$-加群とし，$\boldsymbol{C}$-準同型写像 $f: V \to V$ が $ff = -1$ をみたしているとする．このとき

$$V^+ = \{u \in V \mid f(u) = u\boldsymbol{i}\},\ V^- = \{u \in V \mid f(u) = -u\boldsymbol{i}\}$$

はともに V の部分 $\boldsymbol{C}$-加群であり，V は V^+ と V^- の直和になる：

$$V = V^+ \oplus V^-$$

証明　(1)　V の元 u を

$$u = \frac{u + f(u)}{2} + \frac{u - f(u)}{2}$$

と表わすとき，$\dfrac{u + f(u)}{2} \in V^+$, $\dfrac{u - f(u)}{2} \in V^-$であるから$V = V^+ + V^-$ となる．つぎに $v^+ + v^- = 0$, $v^+ \in V^+$, $v^- \in V^-$ とするとき，$v^+ = f(v^+) = f(-v^-) = -f(v^-) = -(-v^-) = v^-$ であるから，$v^+ + v^- = 0$ とあわせて $v^+ = v^- = 0$ を得る．よって $V = V^+ \oplus V^-$ である．

(2)　V の元 u を

$$u = \frac{u - f(u)\boldsymbol{i}}{2} + \frac{u + f(u)\boldsymbol{i}}{2}$$

と表わして，(1) と同じようにして証明するとよい．

(3)　K-加群のテンソル積

2つの K-加群 V, W から新しい K-加群 $V \otimes_K W$ をつくることを考えよう．

V, W, U を K-加群とする．直積集合 $V \times W$ 上で定義された写像 $\varphi: V \times W \to U$ が

(1)　$\varphi(u + u', w) = \varphi(u, w) + \varphi(u', w)$　　　$u, u' \in V$

(2)　$\varphi(u, w + w') = \varphi(u, w) + \varphi(u, w')$　　　$w, w' \in W$

(3)　$\varphi(u\alpha, w) = \varphi(u, w)\alpha = \varphi(u, w\alpha)$　　　$\alpha \in K$

をみたすとき，φ を **K-双1次写像**という．

定義　V, W を K-加群とする．$(V \otimes_K W, \phi)$ (単に $V \otimes_K W$) が V と W の**テン**

ソル積 K-加群であるとは，つぎの3つの条件をみたすことである．

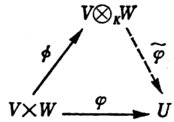
（1） $V\otimes_K W$ は K-加群である．

（2） ϕ: $V\times W\to V\otimes_K W$ は K-双1次写像である．

（3） 任意の K-加群 U と任意の K-双1次写像 φ: $V\times W\to U$ に対して

$$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$$

をみたす K-準同型写像 $\tilde{\varphi}$: $V\otimes_K W\to U$ がただ1つ存在する．



命題 1.8 V, W を K-加群とするとき，V と W のテンソル積 K-加群 $(V\otimes_K W, \phi)$ は存在し，かつ $V\otimes_K W$ は K-加群の同型を除いて1意に定まる．

証明 直積集合 $V\times W$ の各元を基とする K-加群[†]を $F(V, W)$ とする．$F(V, W)$ において

$$(u+u', w)-(u, w)-(u', w) \qquad u, u'\in V$$
$$(u, w+w')-(u, w)-(u, w') \qquad w, w'\in W$$
$$(u\alpha, w)-(u, w)\alpha,\ (u, w\alpha)-(u, w)\alpha \qquad \alpha\in K$$

の形の元全体から生成される部分 K-加群を $I(V, W)$ とし，剰余 K-加群

$$V\otimes_K W=F(V, W)/I(V, W)$$

をつくる．元 $(u, w)\in V\times W$ を含む類を $u\otimes w$ で表わすと，明らかに

$$(u+u')\otimes w=u\otimes w+u'\otimes w$$
$$u\otimes(w+w')=u\otimes w+u\otimes w'$$
$$u\alpha\otimes w=(u\otimes w)\alpha=u\otimes w\alpha$$

がなりたっている．さて写像 ϕ: $V\times W\to V\otimes_K W$ を

$$\phi(u, w)=u\otimes w$$

と定義すると，ϕ は K-双1次写像である．つぎに K-加群 U と K-双1次写像 φ: $V\times W\to U$ に対して，写像 ψ: $F(V, W)\to U$ を

$$\psi(\sum(u, w)\alpha_{(u,w)})=\sum\varphi(u, w)\alpha_{(u,w)}$$

---

† S を集合とする．形式的有限和 $\sum s\alpha_s$, $s\in S$, $\alpha_s\in K$ 全体の集合 $F(S)$ において，和と $\alpha\in K$ の作用を

$$\sum s\alpha_s+\sum s\beta_s=\sum s(\alpha_s+\beta_s)$$
$$(\sum s\alpha_s)\alpha=\sum s(\alpha_s\alpha)$$

と定義すると，$F(S)$ は K-加群になる．この K-加群 $F(S)$ を集合 S の各元を**基とする K-加群**という（2頁参照）．

と定義すると ϕ は K - 準同型写像であるが，φ が双1次写像であることから $\phi(I(V, W))=0$ となる．よって ϕ は K - 準同型写像 $\tilde{\varphi}$: $V\otimes_K W\to U$ を誘導し，かつ

$$\tilde{\varphi}(u\otimes w)=\varphi(u, w)$$

をみたしている：$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$. もう1つの K - 準同型写像 $\tilde{\varphi}'$: $V\otimes_K W\to U$ が $\varphi=\tilde{\varphi}'\phi$ をみたしているとする．このとき $\tilde{\varphi}'(u\otimes w)=\varphi(u, w)=\tilde{\varphi}(u\otimes w)$ がなりたつので，$V\otimes_K W$ の元は有限和 $\sum u_i\otimes w_i$ で表わされることに注意すると，$\tilde{\varphi}'=\tilde{\varphi}$ がわかる．よって φ に対して $\tilde{\varphi}$ がただ1つに定まることが示された．最後に V, W に対して $V\otimes_K W$ が K - 同型を除いて1意に定まることの証明は，命題1.1の後半と同様にするとよい．

$V_1, \cdots, V_n$, U を K - 加群とする．写像 φ: $V_1\times\cdots\times V_n\to U$ が

$$\varphi(\cdots, u_i+u_i', \cdots)=\varphi(\cdots, u_i, \cdots)+\varphi(\cdots, u_i', \cdots)\qquad u_i, u_i'\in V_i$$

$$\varphi(\cdots, u_i\alpha, \cdots)=\varphi(\cdots, u_i, \cdots)\alpha\qquad \alpha\in K$$

をみたすとき，φ を **K - 双1次写像**という．これを用いると，上記と同じようにして $V_1, \cdots, V_n$ の**テンソル積 K - 加群** $V_1\otimes_K\cdots\otimes_K V_n$ を定義することができる．（詳しいことは省略する）．

命題 1.9 K - 加群の K - 同型類全体の集合は，直和 $\oplus$ とテンソル積 $\otimes$ に関して単位元 K をもつ可換半環をつくる．すなわち K - 加群 V, W, U に対して，命題1.5のほかにつぎの K - 加群の同型が存在する．

（1） $V\otimes_K W\cong W\otimes_K V$

（2） $V\otimes_K(W\otimes_K U)\cong V\otimes_K W\otimes_K U\cong(V\otimes_K W)\otimes_K U$

（3） $(V\oplus W)\otimes_K U\cong(V\otimes_K U)\oplus(W\otimes_K U)$

（4） $V\otimes_K K\cong V$

証明 （1） 写像 φ: $V\times W\to W\otimes_K V$ を $\varphi(u, w)=w\otimes u$ と定義すると，φ は K - 双1次写像である．よって $\tilde{\varphi}(u\otimes w)=w\otimes u$ をみたす K - 準同型写像 $\tilde{\varphi}$: $V\otimes_K W\to W\otimes_K V$ が（ただ1つ）存在する．この $\tilde{\varphi}$ が K - 同型写像であることを示すことは容易である．

（2） 写像 $\tilde{\varphi}$: $V\otimes_K W\otimes_K U\to V\otimes_K(W\otimes_K U)$, $\tilde{\varphi}(v\otimes w\otimes u)=v\otimes(w\otimes u)$ は K - 同型写像である[†]．よって $V\otimes_K W\otimes_K U\cong V\otimes_K(W\otimes_K U)$ である．同様に $V\otimes_K$

[†] 厳密には (1) の証明のように，写像 φ: $V\times W\times U\to V\otimes_K(W\otimes_K U)$, $\varphi(v, w, u)=v\otimes(w\otimes u)$ は K - 双1次写像であるから，K - 準同型写像 φ を誘導して…と述べなければな →

$W\otimes_K U\cong(V\otimes_K W)\otimes_K U$ である.

（3） 写像 $\tilde{\varphi}$: $(V\oplus W)\otimes_K U\to(V\otimes_K U)\oplus(W\otimes_K U)$, $\tilde{\varphi}((v, w)\otimes u)=(v\otimes u, w\otimes u)$ は K - 同型写像である.

（4） 写像 $\tilde{\varphi}$: $V\otimes_K K\to V$, $\tilde{\varphi}(u\otimes\alpha)=u\alpha$ は K - 同型写像である.

補題 1.10 V, W を有限次元 K - 加群とし, $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_m$ をそれぞれ V, W の基とする. このとき

$$u_1\otimes w_1, u_2\otimes w_1, \cdots, u_n\otimes w_1, u_1\otimes w_2, \cdots, u_n\otimes w_2, \cdots, \cdots, u_n\otimes w_m$$

は $V\otimes_K W$ の基になる. 特に $V\otimes_K W$ はnm 次元(K - 加群) である:

$$\dim_K(V\otimes_K W)=\dim_K V\dim_K W$$

証 明 $V\otimes_K W$ の元が$\sum_{i,j}(u_i\otimes w_j)\alpha_{ij}$, $\alpha_{ij}\in K$ の形で表わされることは明らかであろう. つぎに $u_1\otimes w_1, u_2\otimes w_1, \cdots, u_n\otimes w_m$ が1次独立であることを示そう. $\sum_{i,j}(u_i\otimes w_j)\alpha_{ij}=0$, $\alpha_{ij}\in K$ とする. これは $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}u_i\alpha_{ij})\otimes w_j=0$ とかけるので, $\sum_{j=1}^{m}v_j\otimes w_j=0$, $v_j\in V$ ならば $v_j=0$, $j=1, \cdots, m$ を証明すると目的が達せられる. さて, 各 w_j が生成する W の1次元部分 K - 加群を W_j とすると, $W=\bigoplus_{j=1}^{m}W_j$, $W_j\cong K$ となるから, 命題1.9より K - 加群の同型

$$V\otimes_K W=V\otimes_K(\bigoplus_{j=1}^{m}W_j)\cong\bigoplus_{j=1}^{m}(V\otimes_K W_j)\cong\bigoplus_{j=1}^{m}(V\otimes_K K)\cong\bigoplus_{j=1}^{m}V$$

を得る. この K - 同型で, 元 $\sum_{j=1}^{m}v_j\otimes w_j$ は $(v_1, \cdots, v_m)$ に対応している. したがって $\sum_{j=1}^{m}v_j\otimes w_j=0$ ならば $(v_1, \cdots, v_m)=(0, \cdots, 0)$, すなわち $v_1=0, \cdots, v_m=0$ となる. 以上で補題が証明された.

例 1.16 有限次元 K - 加群の K - 同型類全体の集合 M_K は, 直和$\oplus$とテンソル積$\otimes$に関して単位元 K をもつ可換半環をつくる（命題1.9, 補題1.10). そして例1.15と同様にすると, M_K は0および自然数全体の集合 N のつくる半環（例1.6）に半環同型である（補題1.10）ことがわかる. したがって半環 M_K の普遍環 $R(M_K)$ は整数環 $\boldsymbol{Z}$ に環同型である（例1.7): $R(M_K)\cong\boldsymbol{Z}$.

→ らないが, 略してこのようなかき方をする. なお, もう少し補足すると, $V\otimes_K W$ の元は $v\otimes w$, $v\in V$, $w\in W$ と表わされるとは限らないで, これらの有限和 $\sum_i v_i\otimes w_i$ とかけているのである（なお, この表示の仕方も1意的でない). しかし K - 準同型写像 f: $V\otimes_K W\to U$ を定義するとき, $f(v\otimes w)=u$ のようにかいて, $V\otimes_K W$ の元がすべて $v\otimes w$ の形でかけるような感じを与えるかもしれないが, その意味は初めに注意したようなことの略記法なのである.

(4)　双対 K-加群

定義　V を K-加群とする．K-準同型写像 ξ: $V \to K$ 全体の集合 $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ において，和と $\alpha \in K$ の作用を

$$(\xi+\eta)(u)=\xi(u)+\eta(u) \qquad \xi, \eta \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

$$(\xi\alpha)(u)=(\xi(u))\alpha \qquad u \in V, \alpha \in K$$

と定義すると，$\mathrm{Hom}_K(V, K)$ は K-加群になる．この K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ を V の**双対 K-加群**という．

補題 1.11　V を n 次元 K-加群とするとき，$\mathrm{Hom}_K(V, K)$ も n 次元(K-加群)である：

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, K))=\dim_K V$$

証明　V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとる．ξ_i: $V \to K$ を

$$\xi_i(u_j)=\delta_{ij} \qquad j=1, \cdots, n$$

をみたす K-準同型写像とすると，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ は $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ の基になる．実際，$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i=0$, $\alpha_i \in K$ とするとき，$(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i)(u_k)=0$ より $\alpha_k=0$, $k=1, \cdots, n$ となるので，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ は1次独立である．つぎに $\xi \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ に対して，$\xi(u_i)=\alpha_i$, $i=1, \cdots, n$ であるとすると $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i$ となる．したがって $\xi_1, \cdots, \xi_n$ は $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ の基である．(この $\xi_1, \cdots, \xi_n$ を $u_1, \cdots, u_n$, の**双対基**という)．よって $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ の次元は n である．

命題 1.12　K-加群 V, W に対して，つぎの K-加群の同型が存在する．[†]

(1)　$\mathrm{Hom}_K(V \oplus W, K) \cong \mathrm{Hom}_K(V, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(W, K)$

(2)　V, W が有限次元ならば

$$\mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, K) \cong \mathrm{Hom}_K(V, K) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(W, K)$$

(3)　V が有限次元ならば $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K) \cong V$

証明　(1)　写像 f: $\mathrm{Hom}_K(V, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V \oplus W, K)$

$$(f(\xi, \eta))(u, w)=\xi(u)+\eta(w) \qquad u \in V, w \in W$$

は K-同型写像である．

(2)　写像 f: $\mathrm{Hom}_K(V, K) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, K)$ を

[†] (2) (3) において，単に K-加群の同型を示すだけならば両者の次元が等しいことを示せば十分であるが，あとの必要（命題 2.7）のために具体的な K-同型写像を与えて証明している．このことは命題 1.14，1.24，例 1.25 などにおいても同様である．

$$(f(\xi\otimes\eta))(u\otimes w)=(\xi(u))(\eta(w)) \qquad u\in V,\ w\in W$$

をみたすように定義すると，f は K - 同型写像である.

（3） 写像 f: $V\to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V,K),K)$

$$(f(u))(\xi)=\xi(u) \qquad u\in V,\ \xi\in \mathrm{Hom}_K(V,K)$$

は K - 同型写像である.

例 1.17 V, W を K - 加群とする. K - 準同型写像 ξ: $V\to W$ 全体の集合 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ において，和と $\alpha\in K$ の作用を

$$(\xi+\eta)(u)=\xi(u)+\eta(u) \qquad \xi,\eta\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$$

$$(\xi\alpha)(u)=(\xi(u))\alpha \qquad u\in V,\ \alpha\in K$$

と定義すると，$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ は K - 加群になる. また V, W をそれぞれ n, m 次元 K - 加群とするとき，$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ は nm 次元 K - 加群である. 実際，V, W にそれぞれ基 $u_1,\cdots,u_n$; $w_1,\cdots,w_m$ をとり，ξ_{ji}: $V\to W$ を

$$\xi_{ji}(u_k)=w_j\delta_{ik}$$

をみたす K - 準同型写像とすると，ξ_{ji}, $j=1,\cdots,m$, $i=1,\cdots,n$ は $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ の基になるので，$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ は nm 次元である. V の双対 K - 加群 $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ は $W=K$ の特別の場合である.

（5） 共役 K - 加群

定義 V を K - 加群とする. 加群 V において $\alpha\in K$ の作用 $u\cdot\alpha$ を

$$u\cdot\alpha=u\bar{\alpha} \qquad u\in V$$

と定義すると，V は K - 加群になる. この K - 加群を $\bar{V}$ で表わし，V の **共役 K - 加群** という.

V が $\boldsymbol{R}$ - 加群のときには明らかに $\bar{V}=V$ であるから，共役 K - 加群を考える意味があるのは $K=\boldsymbol{C}$ のときである.

命題 1.13 K - 加群 V, W に対して，つぎの K - 加群の同型が存在する.

（1） $\overline{V\oplus W}\cong\bar{V}\oplus\bar{W}$

（2） $\overline{V\otimes_K W}\cong\bar{V}\otimes_K\bar{W}$

（3） $\bar{\bar{V}}\cong V$

（4） $\overline{\mathrm{Hom}_K(V,K)}\cong\mathrm{Hom}_K(\bar{V},K)$

証明 いずれも容易であるが，(4) を証明してみよう. まず K - 準同型写像 ξ: $V\to K$ に対して，写像 $\bar{\xi}$: $\bar{V}\to K$ を $\bar{\xi}(u)=\overline{\xi(u)}$ と定義すると $\bar{\xi}$ は K - 準同型写像である.

実際，$\bar{\xi}(u+v)=\bar{\xi}(u)+\bar{\xi}(v)$ は自明であり，かつ

$$\bar{\xi}(u\cdot\alpha)=\bar{\xi}(u\bar{\alpha})=\overline{\xi(u\bar{\alpha})}=\overline{\xi(u)\bar{\alpha}}=\overline{\xi(u)}\alpha=\bar{\xi}(u)\alpha \qquad \alpha\in K$$

となるからである．さて写像 $f\colon \overline{\mathrm{Hom}_K(V,K)}\to \mathrm{Hom}_K(\bar{V},K)$ を

$$f(\xi)=\bar{\xi}$$

と定義すると，f は K-同型写像になる．実際，$f(\xi+\eta)=f(\xi)+f(\eta)$ および f が全単射であることは自明であり，かつ

$$(f(\xi\cdot\alpha))(u)=(f(\xi\bar{\alpha}))(u)=\overline{\xi\bar{\alpha}}(u)=\overline{\xi(u)\bar{\alpha}}=\overline{\xi(u)}\alpha=\bar{\xi}(u)\alpha=(f(\xi)\alpha)(u)$$

より $f(\xi\cdot\alpha)=f(\xi)\alpha,\ \alpha\in K$ となるからである．

命題 1.14　V を内積をもつ有限次元 K-加群とするとき，つぎの K-加群の同型が存在する．

$$\bar{V}\cong \mathrm{Hom}_K(V,K)$$

証明　$u\in V$ に対して写像 $\xi_u\colon V\to K$ を $\xi_u(v)=(u,v)$ と定義すると，ξ_u は K-準同型写像となることに注意して，写像 $f\colon \bar{V}\to \mathrm{Hom}_K(V,K)$ を

$$f(u)=\xi_u$$

と定義すると，f は K-準同型写像である．実際，$f(u+v)=f(u)+f(v)$ は自明であり，かつ

$$(f(u\cdot\alpha))(v)=(f(u\bar{\alpha}))(v)=(u\bar{\alpha},v)=(u,v)\alpha=(f(u)(v))\alpha=(f(u)\alpha)(v)$$

より $f(u\cdot\alpha)=f(u)\alpha,\ \alpha\in K$ となるからである．さらに f は単射である．実際，$f(u)=0$ とするとき $0=f(u)(u)=(u,u)$ より $u=0$ となるからである．しかるに $\bar{V}$ と $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ はともに V の次元に等しい K-加群である（前者は自明であり後者は補題1.11）から，f は K-同型写像である（補題1.4）．

例 1.18　V を内積をもつ有限次元 K-加群とし，$u_1,\cdots,u_n$ を V の正規直交基とする．このとき命題1.14の K-同型写像 $f\colon \bar{V}\to \mathrm{Hom}_K(V,K)$ による像 $\xi_1=f(u_1),\cdots,\xi_n=f(u_n)$ は $u_1,\cdots,u_n$ の双対基になる．実際，

$$\xi_i(u_j)=f(u_i)(u_j)=(u_i,u_j)=\delta_{ij}$$

となるからである．

§5.　K-多元環

(1)　K-多元環

定義　集合 A の任意の 2 つの元 a,b と K の任意の元 α に対し，和 $a+b\in A$ と積

$ab\in A$ および $a\alpha\in A$ が定義されていて

（1） A は算法 $a+b$, ab に関して環である.

（2） A は算法 $a+b$, $a\alpha$ に関して K-加群である.

（3） $(a\alpha)b=(ab)\alpha=a(b\alpha)$

がなりたつとき，A は **K-多元環** であるという．K-多元環 A が環として単位元 1 をもつとき，A を **単位元 1 をもつ K-多元環** という．単位元 1 をもつ K-多元環においては，1α, $\alpha\in K$ を単に α とかくことにする．また K-多元環 A が K-加群として n 次元であるとき，A を **n 次元 K-多元環** という.

K-多元環 A の部分環 B が同時に A の部分 K-加群であるとき，B を A の **部分 K-多元環** という．また K-多元環 A において，環 A のイデアル $\mathfrak{a}$ が同時に K-加群 A の部分 K-加群であるとき，$\mathfrak{a}$ を A の **K-イデアル** という．このとき剰余環 $A/\mathfrak{a}$ は K-多元環の構造をもっている．この K-多元環 $A/\mathfrak{a}$ を A の $\mathfrak{a}$ による **剰余 K-多元環** という.

定義 A, B を K-多元環とする．$f\colon A\to B$ が環準同型写像であると同時に K-準同型写像であるとき，f を **K-多元環準同型写像** という．K-多元環準同型写像 $f\colon A\to B$ が全単射であるとき，f を **K-多元環同型写像** という．2つの K-多元環 A, B の間に K-多元環同型写像 $f\colon A\to B$ が存在するとき，A と B は **K-多元環同型** であるといい，記号 $A\cong B$ で表わす.

例 1.19 $\boldsymbol{R}$ は 1 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である．$\boldsymbol{C}$ は 2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環であり，かつ 1 次元 $\boldsymbol{C}$-多元環である．$\boldsymbol{H}$ は 4 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である.

例 1.20 $F=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．F の元を成分にもつ (n, n)-型行列全体の集合 $M(n, F)$ において，和と積を

$$\left(a_{ji}\right)+\left(b_{ji}\right)=\left(a_{ji}+b_{ji}\right)$$

$$\left(a_{jk}\right)\left(b_{ki}\right)=\left(c_{ji}\right)\qquad c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

と定義すると，$M(n, F)$ は単位元 $E=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$ をもつ環になる．さらに $M(n, F)$ は K-加群であった（例 1.13）から，つぎのことがわかる．$M(n, \boldsymbol{R})$ は n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である．$M(n, \boldsymbol{C})$ は $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環であり，かつ n^2 次元 $\boldsymbol{C}$-多元環である．$M(n, \boldsymbol{H})$ は $4n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である．（$M(n, \boldsymbol{H})$ は $\boldsymbol{C}$-多元環でないことに注意）.

例 1.21 V を n 次元 K - 加群とする. K - 加群 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ (例 1.17) において積 $\xi\eta$ を

$$(\xi\eta)(u) = \xi(\eta(u)) \qquad u \in V$$

と定義すると, $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ は n^2 次元 K - 多元環になる. そして $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ と $M(n, K)$ (例 1.20) は K - 多元環として同型である:

$$\mathrm{Hom}_K(V, V) \cong M(n, K)$$

実際, V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり, $\xi \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ が

$$\xi(u_i) = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji} \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとして, ξ に対して行列 $A_\xi = \left(a_{ji}\right) \in M(n, K)$ をつくる. このとき写像 f: $\mathrm{Hom}_K(V, V) \to M(n, K)$, $f(\xi) = A_\xi$ は K - 多元環の同型を与えている.

例 1.22 K に係数をもつ多項式環 $K[x]$ において $\alpha \in K$ の作用を

$$(\sum a_i x^i)\alpha = \sum (a_i\alpha)x^i$$

と定義すると, $K[x]$ は (無限次元) K - 多元環になる. 同様に $K[x_1, \cdots, x_n]$ も K - 多元環である.

定義 A, B を K - 多元環とする. 直積集合 $A \times B$ において, 和と積および $\alpha \in K$ の作用を

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$
$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$
$$(a, b)\alpha = (a\alpha, b\alpha)$$

と定義すると, $A \times B$ は K - 多元環になる. この K - 多元環を $A \oplus B$ で表わし, A と B の **直和** という.

定義 A, B を K - 多元環とする. テンソル積 K - 加群 $A \otimes_K B$ において積を

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

をみたすように定義すると, $A \otimes_K B$ は K - 多元環になる. この K - 多元環 $A \otimes_K B$ を A と B の **テンソル積 K - 多元環** という.

補題 1.15 K - 多元環の K - 多元環同型類全体の集合は, 直和 $\oplus$ とテンソル積 $\otimes$ に関して単位元 K をもつ可換半環をつくる. すなわち K - 多元環 A, B, C に対して, つぎの K - 多元環の同型が存在する.

(1) $A \oplus B \cong B \oplus A$ $\qquad$ $A \otimes_K B \cong B \otimes_K A$

（2）　$A\oplus(B\oplus C)\cong(A\oplus B)\oplus C$　　$A\otimes_K(B\otimes_K C)\cong(A\otimes_K B)\otimes_K C$

（3）　$A\oplus 0\cong A$　　$A\otimes_K K\cong A$

（4）　$(A\oplus B)\otimes_K C\cong(A\otimes_K C)\oplus(B\otimes_K C)$

補題 1.16　つぎの $\boldsymbol{R}$-多元環の同型が存在する.

$$M(n, \boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\cong M(n, \boldsymbol{C})\qquad M(n, \boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{H}\cong M(n, \boldsymbol{H})$$

証明　まず $M(n, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{C}$, $M(n, \boldsymbol{C})$ はそれぞれ n^2, 2, $2n^2$ 次元 $\boldsymbol{R}$-多元環である（例1.19, 1.20）ことに注意しよう. さて写像 $f: M(n, \boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to M(n, \boldsymbol{C})$

$$f(A\otimes\alpha)=A\alpha$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている. $M(n, \boldsymbol{H})$ についても同様である.

(2)　テンソル K-多元環

K-加群 V からテンソル K-多元環とよばれる K-多元環 $T(V)$ をつくろう.

定義　V を K-加群とする. $(T(V), \tau)$（単に $T(V)$）が V の**テンソル K-多元環**であるとは, つぎの 3 つの条件をみたすことである.

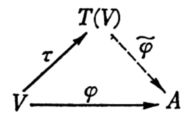
（1）　$T(V)$ は単位元 1 をもつ K-多元環である.

（2）　$\tau: V\to T(V)$ は K-準同型写像である.

（3）　単位元 1 をもつ任意の K-多元環 A と任意の K-準同型写像 $\varphi: V\to A$ に対して

$$\varphi=\tilde{\varphi}\tau$$

をみたす K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}: T(V)\to A$ がただ 1 つ存在する.



命題 1.17　V を K-加群とするとき, V のテンソル K-多元環 $(T(V), \tau)$ は存在し, かつ $T(V)$ は K-多元環の同型を除いて 1 意に定まる.

証明　まず K-多元環 $T(V)$ をつぎのようにつくる. K-加群 $T^r(V)$, $r=0, 1, 2, \cdots$ を

$$T^0(V)=K,\ T^1(V)=V,\ T^2(V)=V\otimes_K V, \cdots, T^r(V)=V\otimes_K\cdots\otimes_K V, \cdots$$

とおき, これらの K-加群の直和（2 頁参照）を $T(V)$ とする:

$$T(V)=\bigoplus_{r\geqq 0}T^r(V)$$

$T(V)$ の 2 つの元 $u_1\otimes\cdots\otimes u_r\in T^r(V)$, $v_1\otimes\cdots\otimes v_s\in T^s(V)$ の積を

$$(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)(v_1\otimes\cdots\otimes v_s)=u_1\otimes\cdots\otimes u_r\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_s$$

をみたすように定義する. $s=0$ のときには（$r=0$ のときも同様）$(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)\alpha=$

$(u_1\alpha)\otimes\cdots\otimes u_r=\cdots=u_1\otimes\cdots\otimes(u_r\alpha)$ と定義する．$T(V)$ の元は $\sum_{r\geqq 0}\sum u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_r}$（有限和）と表わされるので，分配法則を仮定すると $T(V)$ に積が定義されて，$T(V)$ は単位元 $1\in K$ をもつ K-多元環になる．τ: $V=T^1(V)\to T(V)$ を包含写像とすると τ は K-準同型写像である．つぎに単位元 1 をもつ K-多元環 A と K-準同型写像 φ: $V\to A$ に対して，K-準同型写像 $\tilde{\varphi}$: $T(V)\to A$ を

$$\tilde{\varphi}(1)=1,\qquad \tilde{\varphi}(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)=\varphi(u_1)\cdots\varphi(u_r)$$

をみたすように定義すると，$\tilde{\varphi}$ は K-多元環準同型写像であって $\varphi=\tilde{\varphi}\tau$ をみたしている．もう 1 つの K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}'$: $T(V)\to A$ が $\varphi=\tilde{\varphi}'\tau$ をみたしているとする．$T(V)$ は K と $\tau(V)$ より K-多元環として生成されているので，$\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\varphi}'$ が K と $\tau(V)$ 上で一致していることから $T(V)$ で一致している：$\tilde{\varphi}=\tilde{\varphi}'$．最後に V に対してテンソル K-多元環 $T(V)$ が K-多元環の同型を除いて 1 意に定まることの証明は，命題 1.1 の後半と同様にするとよい．

例 1.23　1 次元 K-加群 V のテンソル K-多元環 $T(V)$ は $K[x]$（例 1.22）と K-多元環同型である：$T(V)\cong K[x]$．実際，V に基 u をとり，写像 f: $T(V)\to K[x]$ を

$$f(1)=1,\ f(u)=x,\ f(u\otimes u)=x^2,\cdots,\ f(u\otimes\cdots\otimes u)=x^n,\cdots$$

をみたす K-準同型写像とすると，f は K-多元環の同型を与えている．

テンソル K-多元環 $T(V)$ はそのつくり方からわかるように，単に K-多元環であるだけでなく，つぎに述べるような連結な次数つき K-多元環になっている．

定義　$A=\bigoplus_{r\geqq 0}A^r$ が**次数つき K-多元環**であるとは，つぎの 3 つの条件をみたすことである．

（1）A は K-多元環である．

（2）A は部分 K-加群 A^r, $r=0,1,2,\cdots$ の直和である．

（3）$a\in A^r$, $b\in A^s$ ならば $ab\in A^{r+s}$ である．（このことを $A^rA^s\subset A^{r+s}$ とかく）．

さらに $A^0=K$ であるとき，A は**連結**であるという．

$A=\bigoplus_{r\geqq 0}A^r$, $B=\bigoplus_{r\geqq 0}B^r$ を次数つき K-多元環とする．K-多元環準同型写像 f: $A\to B$ が

$$f(A^r)\subset B^r\qquad r=0,1,2,\cdots$$

をみたすとき，f を**次数つき K-多元環準同型写像**という．

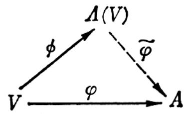
(3) 外積 K-多元環

K-加群 V から外積 K-多元環とよばれる K-多元環 $\Lambda(V)=\bigoplus_{r\geq 0}\Lambda^r(V)$ をつくろう．この $\Lambda^r(V)$ は群の表現論において重要な役割を果すことになる．

定義　V を K-加群とする．$(\Lambda(V), \phi)$（単に $\Lambda(V)$）が V の**外積 K-多元環**であることは，つぎの3つの条件をみたすことである．

（1）$\Lambda(V)$ は単位元1をもつ K-多元環である．

（2）$\phi\colon V\to\Lambda(V)$ は $(\phi(u))^2=0,\ u\in V$ をみたす K-準同型写像である．



（3）単位元1をもつ任意の K-多元環 A と $(\varphi(u))^2=0,\ u\in V$ をみたす任意の K-準同型写像 φ に対して

$$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$$

をみたす K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}\colon\Lambda(V)\to A$ がただ1つ存在する．

命題 1.18　V を K-加群とするとき，V の外積 K-多元環$(\Lambda(V), \phi)$ は存在し，かつ $\Lambda(V)$ は K-多元環の同型を除いて1意に定まる．

証明　$(T(V), \tau)$ を V のテンソル K-多元環とする．$T(V)$ において $\{(\tau(u))^2|u\in V\}$ より生成される K-イデアルを $\mathfrak{a}(V)$ とし，剰余 K-多元環

$$\Lambda(V)=T(V)/\mathfrak{a}(V)$$

をつくる．元 $a\in T(V)$ を含む類を $[a]$ で表わす．このとき $\Lambda(V)$ は単位元 $[1]$ をもつ K-多元環になる．写像 $\phi\colon V\to\Lambda(V)$ を

$$\phi(u)=[\tau(u)]$$

と定義すると，ϕ は $(\phi(u))^2=[\tau(u)]^2=[(\tau(u))^2]=0,\ u\in V$ をみたす K-準同型写像である．つぎに A を単位元1をもつ K-多元環とし，$\varphi\colon V\to A$ を $(\varphi(u))^2=0,\ u\in V$ をみたす K-準同型写像とする．まずテンソル K-多元環 $T(V)$ の性質から φ に対して $\varphi=\psi\tau$ をみたす K-多元環準同型写像 $\psi\colon T(V)\to A$ が存在する．この ψ は $\psi((\tau(u))^2)=(\psi(\tau(u)))^2=(\varphi(u))^2=0,\ u\in V$ をみたしているので，$\psi(\mathfrak{a}(V))=0$ となる．よって ψ は K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}\colon\Lambda(V)=T(V)/\mathfrak{a}(V)\to A,\ \tilde{\varphi}([a])=\psi(a)$ を誘導し，$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$ をみたしている．$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$ をみたす K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}$ が φ に対してただ1つに定まることは，$\Lambda(V)$ が K と $\phi(V)$ より K-多元環として生成されていることからわかる．最後に V に対して外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ が K-多元環の同型を除いて1意に定まることの証明は，命題1.1の後半と同様にするとよい．

命題 1.19　K-加群 V の外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ は連結な次数つき K-多元環である：

$$\Lambda(V)=\bigoplus_{r\geqq 0}\Lambda^r(V) \qquad \Lambda^0(V)=K,\ \Lambda^1(V)=V$$

証明　命題1.18の証明と同じ記号を用いる．写像 $\pi: T(V)\to T(V)/\mathfrak{a}(V)=\Lambda(V)$ を $\pi(a)=[a]$ と定義して $\Lambda^r(V)=\pi(T^r(V))$ とおくと，K-加群の直和 $\Lambda(V)=\bigoplus_{r\geqq 0}\Lambda^r(V)$ を得る（直和になることの証明は簡単であるから省略する）．また $\Lambda^r(V)\Lambda^s(V)\subset\Lambda^{r+s}(V)$ であることも $T^r(V)T^s(V)\subset T^{r+s}(V)$ と π が K-多元環準同型写像であることからわかる．

補題 1.20　K-加群 V の外積 K-多元環 $(\Lambda(V),\phi)$ において

$$\phi(u)\phi(v)+\phi(v)\phi(u)=0 \qquad u, v\in V$$

がなりたつ．

証明　$0=(\phi(u+v))^2=(\phi(u)+\phi(v))^2$

$$=(\phi(u))^2+\phi(u)\phi(v)+\phi(v)\phi(u)+(\phi(v))^2=\phi(u)\phi(v)+\phi(v)\phi(u)$$

例 1.24　1次元 K-加群 V の外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ は，K-加群としては $\Lambda(V)=K\oplus V$ となるので2次元である．積は $1\in K$ が単位元であり，かつ $u\in V$ ならば $u^2=0$，で与えられている．

外積 K-加群の構造をもっと詳しく知るために，しばらく準備しよう．

定義　$A=\bigoplus_{r\geqq 0}A^r$, $B=\bigoplus_{r\geqq 0}B^r$ を次数つき K-多元環とする．A, B から次数つき K-多元環 $A\hat{\otimes}_K B$ をつぎのように定義する．まず K-加群の直和 $\bigoplus_{r+s=n}(A^r\otimes_K B^s)$ を $(A\hat{\otimes}_K B)^n$ とおき，さらにそれらの K-加群直和を考える：

$$A\hat{\otimes}_K B=\bigoplus_{n\geqq 0}(A\hat{\otimes}_K B)^n, \qquad (A\hat{\otimes}_K B)^n=\bigoplus_{r+s=n}(A^r\otimes_K B^s)$$

そして積を

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=(-1)^{sr'}(aa'\otimes bb') \qquad a'\in A^{r'},\ b\in B^s$$

をみたすように定義して $A\hat{\otimes}_K B$ に K-多元環の構造をいれる．

補題 1.21　$A=\bigoplus_{r\geqq 0}A^r$, $B=\bigoplus_{r\geqq 0}B^r$, $C=\bigoplus_{n\geqq 0}C^n$ を次数つき K-多元環とする．2つの次数つき K-多元環準同型写像 $f: A\to C$, $g: B\to C$ が

$$f(a)g(b)=(-1)^{rs}g(b)f(a) \qquad a\in A^r,\ b\in B^s$$

をみたすならば，K-準同型写像 $h: A\hat{\otimes}_K B\to C$ を

$$h(a\otimes b)=f(a)\,g(b)$$

をみたすように定義するとき，h も次数つき K-多元環準同型写像になる．

証明　h が次数を保つことは明らかであるから，h が積を保つことを示そう．

$$h((a\otimes b)(a'\otimes b'))\qquad a'\in A^{r'},\ b\in B^{s}$$
$$=h((-1)^{sr'}(aa'\otimes bb'))=(-1)^{sr'}f(aa')\,g(bb')=(-1)^{sr'}f(a)f(a')g(b)g(b')$$
$$=f(a)g(b)f(a')g(b')=h(a\otimes b)h(a'\otimes b')$$

補題 1.22　K-加群 V が部分 K-加群 V_1, V_2 の直和：$V=V_1\oplus V_2$ であるとし，$(\Lambda(V_1),\phi_1)$，$(\Lambda(V_2),\phi_2)$ をそれぞれ V_1, V_2 の外積 K-多元環とする．このとき写像 Φ：$V\to\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$ を

$$\Phi(u_1+u_2)=\phi_1(u_1)\otimes 1+1\otimes\phi_2(u_2)\qquad u_1\in V_1,\ u_2\in V_2$$

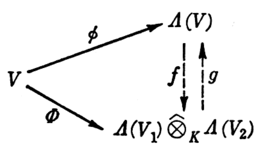
と定義すると，$(\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2),\Phi)$ は V の外積 K-多元環になる．すなわち，つぎの K-多元環の同型が存在する．

$$\Lambda(V_1\oplus V_2)\cong\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$$

証明　V の外積 K-多元環を $(\Lambda(V),\phi)$ とする．まず $\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$ は単位元 $1\otimes 1$ をもつ K-多元環である．つぎに写像 Φ：$V\to\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$ は $(\Phi(u))^2=0$, $u\in V$ をみたしている．実際，$u\in V$ を $u=u_1+u_2$, $u_1\in V_1$, $u_2\in V_2$ と表わすとき

$$(\Phi(u))^2=(\Phi(u_1+u_2))^2=(\phi_1(u_1)\otimes 1+1\otimes\phi_2(u_2))^2$$
$$=(\phi_1(u_1))^2\otimes 1+\phi_1(u_1)\otimes\phi_2(u_2)-\phi_1(u_1)\otimes\phi_2(u_2)+1\otimes(\phi_2(u_2))^2=0$$

となる．よって外積 K-多元環の性質より，$\Phi=f\phi$ をみたす K-多元環準同型写像 f：$\Lambda(V)\to\Lambda(V_1)\widehat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$ が存在する．この f が K-多元環同型写像であることを示そう．i_1：$V_1\to V$, i_2：$V_2\to V$ を包含写像とするとき，ϕi_1, ϕi_2 に対して外積 K-多元環の性質より，それぞれ



$$\phi i_1=\tilde{i}_1\phi_1,\qquad \phi i_2=\tilde{i}_2\phi_2\qquad\qquad (\mathrm{i})$$

をみたす K-多元環準同型写像 $\tilde{i}_1$：$\Lambda(V_1)\to\Lambda(V)$，$\tilde{i}_2$：$\Lambda(V_2)\to\Lambda(V)$ が存在する．このとき

$$\tilde{i}_1(a_1)\tilde{i}_2(a_2)=(-1)^{rs}\tilde{i}_2(a_2)\tilde{i}_1(a_1)\qquad a_1\in\Lambda^r(V_1),\ a_2\in\Lambda^s(V_2)\qquad (\mathrm{ii})$$

がなりたつ．実際，$\phi_1(V_1)$，$\phi_2(V_2)$ が K とともにそれぞれ $\Lambda(V_1)$，$\Lambda(V_2)$ を K-多元環として生成しているので，(ii) を示すには

$$\tilde{i}_1\phi_1(u_1)\tilde{i}_2\phi_2(u_2)=-\tilde{i}_2\phi_2(u_2)\tilde{i}_1\phi_1(u_1)\qquad u_1\in V_1,\ u_2\in V_2$$

を示すとよいが，これは (i) より

$$\phi i_1(u_1)\phi i_2(u_2) = -\phi i_2(u_2)\phi i_1(u_1)$$

すなわち

$$\phi(u_1)\phi(u_2) = -\phi(u_2)\phi(u_1)$$

のことである．しかるに，これは補題 1.20 によりなりたっている．よって (ii) が示された．(ii) がなりたつので，K-準同型写像 g: $\Lambda(V_1)\hat{\otimes}_K\Lambda(V_2) \to \Lambda(V)$ を

$$g(a_1 \otimes a_2) = \tilde{i}_1(a_1)\tilde{i}_2(a_2)$$

をみたすように定義すると，g は（次数つき）K-多元環準同型写像になる（補題 1.21）．そして $gf = 1$, $fg = 1$ がなりたつ．実際，$\Lambda(V)$ は K と $\phi(V)$ より K-多元環として生成されるから，$gf = 1$ を示すためには $\phi(u)$, $u \in V$ に対して示すとよい．しかるに，それは $u \in V$ を $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$ とおくとき

$$\begin{aligned} gf(\phi(u)) &= g\Phi(u) = g\Phi(u_1 + u_2) = g(\phi_1(u_1) \otimes 1 + 1 \otimes \phi_2(u_2)) \\ &= \tilde{i}_1\phi_1(u_1)\tilde{i}_2(1) + \tilde{i}_1(1)\tilde{i}_2\phi_2(u_2) = \phi i_1(u_1) + \phi i_2(u_2) \\ &= \phi(u_1) + \phi(u_2) = \phi(u_1 + u_2) = \phi(u) \end{aligned}$$

により示される．よって $gf = 1$ である．また $\Lambda(V_1)\hat{\otimes}_K\Lambda(V_2)$ は K と $\phi_1(V_1) \otimes 1$ と $1 \otimes \phi_2(V_2)$ より K-多元環として生成されるので，$fg = 1$ を示すには $\phi_1(u_1) \otimes 1$, $u_1 \in V_1$; $1 \otimes \phi_2(u_2)$, $u_2 \in V_2$ に対して示すとよい．しかるに

$$\begin{aligned} fg(\phi_1(u_1) \otimes 1) &= f(\tilde{i}_1\phi_1(u_1)\tilde{i}_2(1)) = f(\phi i_1(u_1)) = f(\phi(u_1)) \\ &= \Phi(u_1) = \Phi(u_1 + 0) = \phi_1(u_1) \otimes 1 \end{aligned}$$

であり，また同様に $fg(1 \otimes \phi_2(u_2)) = 1 \otimes \phi_2(u_2)$ となるので，$fg = 1$ となる．よって f は K-多元環同型写像である．

記号の約束　K-加群 V の外積 K-多元環 $(\Lambda(V), \phi)$ における ϕ: $V \to \Lambda(V)$ は単射 K-準同型写像であるから，V の元 u と $\Lambda(V)$ の元 $\phi(u)$ を同一視して，V を $\Lambda(V)$ の部分 K-加群とみなすことにする：

$$V \subset \Lambda(V)$$

したがって $\phi(u)$ を単に u とかくわけである．また $\Lambda(V)$ における積 ab を以後 $a \wedge b$ とかくことにする．

命題 1.23　V を n 次元 K-加群とし，$u_1, \cdots, u_n$ をその基とする．このとき

$$1,\ u_1, \cdots, u_n, \cdots, u_i \wedge u_j, \cdots, u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}, \cdots, u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$$
$$(i < j) \qquad (i_1 < \cdots < i_r)$$

は外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ の基になる．特に $\Lambda(V)$ の次元は 2^n である：

$$\dim_K \Lambda(V) = 2^n$$

また，つぎの$\binom{n}{r}$[†]個の元

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} \qquad i_1 < \cdots < i_r$$

は$\Lambda^r(V)$の基となる．したがって$\Lambda^r(V)$は$\binom{n}{r}$次元K-加群である．なお$k > n$ならば$\Lambda^k(V) = 0$となる．最後に$u_1, \cdots, u_n$には積に関し

$$\begin{cases} u_i \wedge u_i = 0 & i = 1, \cdots, n \\ u_i \wedge u_j + u_j \wedge u_i = 0 \end{cases}$$

の関係がある．

証明　元u_iより生成されるVの1次元部分K-加群をV_iとすると$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$（$K$-加群の直和）となる．これに補題1.22を繰返し用いると（次数つき）K-多元環の同型

$$\Lambda(V) \cong \Lambda(V_1) \hat{\otimes}_K \cdots \hat{\otimes}_K \Lambda(V_i) \hat{\otimes}_K \cdots \hat{\otimes}_K \Lambda(V_n)$$

を得る．そして，この同型対応により

$$\begin{array}{lll} 1 & \longrightarrow & 1 \otimes \cdots\cdots\cdots\cdots \otimes 1 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_i & \longrightarrow & 1 \otimes \cdots \otimes u_i \otimes \cdots \otimes 1 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} & \rightarrow & 1 \otimes \cdots \otimes u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \otimes \cdots \otimes 1 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1 \wedge \cdots \wedge u_n & \rightarrow & u_1 \otimes \cdots\cdots\cdots\cdots \otimes u_n \end{array}$$

が対応している．しかるに右の列の元は$\Lambda(V_1) \hat{\otimes}_K \cdots \hat{\otimes}_K \Lambda(V_n)$の基である（補題1.10）から，左の列の元$1, \cdots, u_i, \cdots, \cdots, u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$は$\Lambda(V)$の基になる．関係$u_i \wedge u_i = 0$は定義であり，$u_i \wedge u_j + u_j \wedge u_i = 0$は補題1.20である．また命題の残りの部分も明らかであろう．

最後に双対K-加群と外積K-加群との関係を示すつぎの命題をあげておく．

命題 1.24　有限次元K-加群Vに対して，つぎのK-加群の同型が存在する．

(1)　$\Lambda^r(\mathrm{Hom}_K(V, K)) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^r(V), K)$

---

† $\binom{n}{r} = {}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$とする．

（2）$\Lambda^r(\overline{V}) \cong \overline{\Lambda^r(V)}$

証明　（1）K-準同型写像 f: $\Lambda^r(\mathrm{Hom}_K(V, K)) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^r(V), K)$

$$(f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r))(u_1 \wedge \cdots \vee u_r) = \det(\xi_j(u_i))^{\dagger} \qquad \begin{array}{l}\xi_1, \cdots, \xi_r \in \mathrm{Hom}_K(V, K) \\ u, \cdots, u_r \in V\end{array}$$

は K-同型写像である.

（2）は容易である.（例1.14, 命題1.14および上記（1）参照).

§6. 体の変更

(1) 体の制限

定義　V を $\boldsymbol{C}$-加群とする. $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{C}$ の部分体であるから, V を $\boldsymbol{R}$-加群とみることができる. すなわち加群 V における $\alpha \in \boldsymbol{R}$ の作用を

$$u\alpha = u(\alpha + \boldsymbol{i}\,0) \qquad u \in V$$

と定義するのである. このように $\boldsymbol{C}$-加群 V を $\boldsymbol{R}$-加群とみるとき $V_{\boldsymbol{R}}$ で表わすことにする（例1.12参照). この $\boldsymbol{R}$-加群 $V_{\boldsymbol{R}}$ を V の**実制限**（**$\boldsymbol{R}$-加群**）という.

補題 1.25　V が n 次元 $\boldsymbol{C}$-加群ならば, $V_{\boldsymbol{R}}$ は $2n$ 次元（$\boldsymbol{R}$-加群）である.

証明　$u_1, \cdots, u_n$ を V の $\boldsymbol{C}$-基とするとき, $u_1, u_1\boldsymbol{i}, \cdots, u_n, u_n\boldsymbol{i}$ は $V_{\boldsymbol{R}}$ の $\boldsymbol{R}$-基となる. 実際,

$$u_1\alpha_1 + u_1\boldsymbol{i}\beta_1 + \cdots + u_n\alpha_n + u_n\boldsymbol{i}\beta_n = 0 \qquad \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{R}$$

とするとき

$$u_1(\alpha_1 + \boldsymbol{i}\beta_1) + \cdots + u_n(\alpha_n + \boldsymbol{i}\beta_n) = 0$$

となる. しかるに $u_1, \cdots, u_n$ は $\boldsymbol{C}$-1次独立であるから

$$\alpha_1 + \boldsymbol{i}\beta_1 = \cdots = \alpha_n + \boldsymbol{i}\beta_n = 0$$

すなわち $\alpha_1 = \beta_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_n = 0$ となる. よって $u_1, u_1\boldsymbol{i}, \cdots, u_n, u_n\boldsymbol{i}$ は $\boldsymbol{R}$-1次独立である. つぎに V の元 u は

$$\begin{aligned} u &= u_1(\alpha_1 + \boldsymbol{i}\beta_1) + \cdots + u_n(\alpha_n + \boldsymbol{i}\beta_n) \\ &= u_1\alpha_1 + u_1\boldsymbol{i}\beta_1 + \cdots + u_n\alpha_n + u_n\boldsymbol{i}\beta_n \qquad \alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

と表わせる. よって $V_{\boldsymbol{R}}$ は $2n$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群である.

命題 1.26　$\boldsymbol{C}$-加群 V, W に対して, つぎの $\boldsymbol{R}$-加群の同型が存在する.

---

† 記号 $\det A$, $A \in M(n, K)$ は A の行列式を表わす.

$$(V \oplus W)_{\boldsymbol{R}} \cong V_{\boldsymbol{R}} \oplus W_{\boldsymbol{R}}$$

(2) 体の拡大

定義 Vを$\boldsymbol{R}$-加群とする．複素数体$\boldsymbol{C}$を2次元$\boldsymbol{R}$-加群とみて（例1.11）テンソル積$\boldsymbol{R}$-加群$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$をつくる．$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$において$\alpha\in\boldsymbol{C}$の作用を

$$(u\otimes\beta)\alpha = u\otimes\beta\alpha$$

と定義すると，$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$は$\boldsymbol{C}$-加群になる．この$\boldsymbol{C}$-加群$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$を$V$の**複素化**（**$\boldsymbol{C}$-加群**）という．$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$は$V^{\boldsymbol{C}}$ともかく．$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$の元$w$は

$$w = u\otimes 1 + v\otimes \boldsymbol{i} \qquad u, v\in V$$

と1意に表わすことができる（補題1.10参照）．$w = u\otimes 1 + v\otimes \boldsymbol{i}$に対し，$\overline{w} = u\otimes 1 - v\otimes \boldsymbol{i}$を$w$の**共役元**という．

補題 1.27 Vがn次元$\boldsymbol{R}$-加群ならば，$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$も$n$次元（$\boldsymbol{C}$-加群）である．

証明 $u_1, \cdots, u_n$をVの$\boldsymbol{R}$-基とするとき，$u_1\otimes 1, \cdots, u_n\otimes 1$は$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$の$\boldsymbol{C}$-基となる．実際，

$$(u_1\otimes 1)\alpha_1 + \cdots + (u_n\otimes 1)\alpha_n = 0 \qquad \alpha_i\in\boldsymbol{C}$$

とするとき，各α_iを$\alpha_i = a_i + b_i\boldsymbol{i}$, $a_i, b_i\in\boldsymbol{R}$と表わして上式をかきかえると

$$(u_1a_1 + \cdots + u_na_n)\otimes 1 + (u_1b_1 + \cdots + u_nb_n)\otimes \boldsymbol{i} = 0$$

となるが，これより

$$u_1a_1 + \cdots + u_na_n = 0, \qquad u_1b_1 + \cdots + u_nb_n = 0$$

となる．しかるに$u_1, \cdots, u_n$は$\boldsymbol{R}$-1次独立であるから

$$a_1 = \cdots = a_n = 0, \qquad b_1 = \cdots = b_n = 0$$

すなわち$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$となる．よって$u_1\otimes 1, \cdots, u_n\otimes 1$は$\boldsymbol{C}$-1次独立である．つぎに$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$の元$w$は$w = u\otimes 1 + v\otimes \boldsymbol{i}$, $u, v\in V$と表わすことができるので

$$u = u_1a_1 + \cdots + u_na_n,\ v = u_1b_1 + \cdots + u_nb_n \qquad a_i, b_i\in\boldsymbol{R}$$

であるとし，$\alpha_i = a_i + b_i\boldsymbol{i}$とおくと$w$は

$$w = (u_1\otimes 1)\alpha_1 + \cdots + (u_n\otimes 1)\alpha_n$$

と表わせる．よって$V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$は$n$次元$\boldsymbol{C}$-加群である．

例 1.25 $\boldsymbol{R}$-加群$\boldsymbol{R}^n$の複素化$\boldsymbol{R}^n\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$は$\boldsymbol{C}^n$に$\boldsymbol{C}$-加群同型である：$\boldsymbol{R}^n\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\cong\boldsymbol{C}^n$. 実際，写像$f\colon \boldsymbol{R}^n\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^n$, $f(a\otimes\alpha) = a\alpha$は$\boldsymbol{C}$-加群の同型を与えている．同様に$\boldsymbol{R}$-加群$M(n, \boldsymbol{R})$の複素化$\boldsymbol{C}$-加群$M(n, \boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$は$M(n, \boldsymbol{C})$に$\boldsymbol{C}$-加群同型である：$M(n, \boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\cong M(n, \boldsymbol{C})$.

命題 1.28　$\boldsymbol{R}$-加群 V, W に対して，つぎの $\boldsymbol{C}$-加群の同型が存在する

（1）　$(V\oplus W)^{\boldsymbol{C}}\cong V^{\boldsymbol{C}}\oplus W^{\boldsymbol{C}}$

（2）　$(V\otimes_{\boldsymbol{R}}W)^{\boldsymbol{C}}\cong V^{\boldsymbol{C}}\otimes_{\boldsymbol{C}}W^{\boldsymbol{C}}$

（3）　$(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(V, \boldsymbol{R}))^{\boldsymbol{C}}\cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(V^{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{C})$

（4）　$V^{\boldsymbol{C}}\cong \overline{V^{\boldsymbol{C}}}$

（5）　$(\Lambda^r(V))^{\boldsymbol{C}}\cong \Lambda^r(V^{\boldsymbol{C}})$

証明　（1）　命題1.9(3) より明らかである．

（2）　写像 f: $(V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C})\otimes_{\boldsymbol{C}}(W\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C})\to(V\otimes_{\boldsymbol{R}}W)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$

$$f((u\otimes\alpha)\otimes(w\otimes\beta))=(u\otimes w)\otimes\alpha\beta$$

は $\boldsymbol{C}$-同型写像である．

（3）　写像 f: $(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(V, \boldsymbol{R}))\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C})$

$$f(\xi\otimes\alpha)(u\otimes\beta)=(\xi(u))\alpha\beta$$

は $\boldsymbol{C}$-同型写像である．

（4）　写像 f: $V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to\overline{V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}}$

$$f(u\otimes\alpha)=u\otimes\bar{\alpha}$$

は $\boldsymbol{C}$-同型写像である．この写像 f は写像

$$f(w)=\overline{w}\qquad \overline{w}\text{ は } w \text{ の共役元}$$

のことにほかならない．

（5）　写像 f: $\Lambda^r(V)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to\Lambda^r(V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C})$

$$f((u_1\wedge\cdots\wedge u_r)\otimes\alpha)=((u_1\otimes 1)\wedge\cdots\wedge(u_r\otimes 1))\alpha\qquad u_i\in V$$

は $\boldsymbol{C}$-同型写像である．

定義　V を内積をもつ $\boldsymbol{R}$-加群とする．V の複素化 $\boldsymbol{C}$-加群 $V^{\boldsymbol{C}}=V\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ において内積を

$$(u\otimes\alpha, v\otimes\beta)=(u, v)\bar{\alpha}\beta\qquad u, v\in V,\ \alpha, \beta\in\boldsymbol{C}$$

をみたすように与える．このとき $V^{\boldsymbol{C}}$ は内積をもつ $\boldsymbol{C}$-加群になる．

V を内積をもつ $\boldsymbol{R}$-加群とし，$u_1, \cdots, u_n$ を V の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基とするとき，いま定義した $V^{\boldsymbol{C}}$ の内積に関して

$$u_1\otimes 1, \cdots, u_n\otimes 1$$

は $V^{\boldsymbol{C}}$ の正規直交 $\boldsymbol{C}$-基になっている．

例 1.26　例1.14の内積を与えた $\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^{2n}$ において，$\boldsymbol{R}^{2n}$ の標準基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ は

$\boldsymbol{R}^{2n}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基であった. $\boldsymbol{R}^{2n}$ の内積をもつ複素化 $\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{R}^{2n})^{\boldsymbol{C}}$ において

$$e_1 \otimes 1, \cdots, e_{2n} \otimes 1$$

と

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1} \otimes 1 - e_{2i} \otimes i),\ \hat{u}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_{2i-1} \otimes i + e_{2i} \otimes 1) \quad i = 1, \cdots, n$$

は2つの正規直交 $\boldsymbol{C}$-基になっている. そして

$$u_1 \wedge \hat{u}_1 \wedge \cdots \wedge u_n \wedge \hat{u}_n = (e_1 \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (e_{2n} \otimes 1)$$

の関係をみたしている.

最後に $\boldsymbol{R}$-多元環の複素化について触れておこう.

定義 A を $\boldsymbol{R}$-多元環とする. $\boldsymbol{R}$-加群 A の複素化 $\boldsymbol{C}$-加群 $A \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ において積を

$$(a \otimes \alpha)(b \otimes \beta) = ab \otimes \alpha\beta \qquad a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$$

をみたすように定義すると, $A \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{C}$-多元環になる. この $\boldsymbol{C}$-多元環 $A \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を A の **複素化 $\boldsymbol{C}$-多元環** という.

補題 1.29 $\boldsymbol{R}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{R})$ の複素化 $\boldsymbol{C}$-多元環 $M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ は $M(n, \boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{C}$-多元環同型である:

$$M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong M(n, \boldsymbol{C})$$

証明 写像 $f\colon M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \to M(n, \boldsymbol{C})$

$$f(A \otimes \alpha) = A\alpha$$

は $\boldsymbol{C}$-多元環の同型を与えている(補題1.16参照).

§7. Clifford K-多元環

(1) 対称な内積をもつ K-加群

定義 K-加群 V の任意の2つの元 u, v に対して K の元 $\langle u, v\rangle$ が1意に定まり, つぎの3つの条件

(1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(2) $\langle u+u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$ $\qquad u, u', v \in V$

(3) $\langle u, v\alpha\rangle = \langle u, v\rangle \alpha$ $\qquad \alpha \in K$

をみたすとき, V を **対称な内積をもつ K-加群** という. $\langle u, v\rangle$ を u, v の **対称な内積** という.

例 1.27 K の n 個の元 $c_1, \cdots, c_n$ を固定しておく．K-加群 K^n のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して内積を

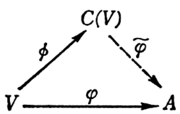
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i b_i$$

で与えると，K^n は対称な内積をもつ K-加群になる．特に $c_1 = \cdots = c_n = -1$, $c_1 = \cdots = c_n = 1$ のときが重要であり，それぞれ $K_-{}^n$, $K_+{}^n$ で表わす．

（2） Clifford K-多元環

定義 V を対称な内積をもつ K-加群とする．$(C(V), \phi)$（単に $C(V)$）が V の **Clifford K-多元環**であるとは，つぎの3つの条件をみたすことである．

（1） $C(V)$ は単位元1をもつ K-多元環である．



（2） ϕ: $V \to C(V)$ は $(\phi(u))^2 = \langle u, u \rangle$, $u \in V$ をみたす K-準同型写像である．

（3） 単位元1をもつ任意の K-多元環 A と $(\varphi(u))^2 = \langle u, u \rangle$, $u \in V$ をみたす任意の K-準同型写像 φ: $V \to A$ に対して

$$\varphi = \tilde{\varphi}\phi$$

をみたす K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}$ がただ1つ存在する．

命題 1.30 V を対称な内積をもつ K-加群とするとき，V の Clifford K-多元環 $(C(V), \phi)$ は存在し，かつ $C(V)$ は K-多元環の同型を除いて1意に定まる．

証明 以下の証明は外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ のとき（命題1.18）と同じであるが再記しよう．$(T(V), \tau)$ を V のテンソル K-多元環とする．$T(V)$ において $\{(\tau(u))^2 - \langle u, u \rangle | u \in V\}$ より生成される K-イデアルを $\mathfrak{a}(V)$ とし，剰余 K-多元環

$$C(V) = T(V)/\mathfrak{a}(V)$$

をつくる．元 $a \in T(V)$ を含む類を $[a]$ で表わす．このとき $C(V)$ は単位元 $[1]$ をもつ K-多元環になる．写像 ϕ: $V \to C(V)$ を

$$\phi(u) = [\tau(u)]$$

と定義すると，ϕ は $(\phi(u))^2 = [\tau(u)]^2 = [\tau(u)^2] = \langle u, u \rangle$, $u \in V$ をみたす K-準同型写像である．つぎに A を単位元1をもつ K-多元環とし，φ: $V \to A$ を $(\varphi(u))^2 = \langle u, u \rangle$, $u \in V$ をみたす K-準同型写像とする．まずテンソル K-多元環 $T(V)$ の性

質から，φ に対して $\varphi=\psi\tau$ をみたす K-多元環準同型写像 ψ: $T(V)\to A$ が存在する．この ψ は $\psi((\tau(u))^2-\langle u, u\rangle)=(\psi\tau(u))^2-\langle u, u\rangle=(\varphi(u))^2-\langle u, u\rangle=0$, $u\in V$ をみたしているので，$\psi(\mathfrak{a}(V))=0$ となる．よって ψ は K-多元環準同型写像 $\tilde{\varphi}$: $C(V)=T(V)/\mathfrak{a}(V)\to A$, $\tilde{\varphi}([a])=\psi(a)$ を誘導し，$\varphi=\tilde{\varphi}\phi$ をみたしている．$\tilde{\varphi}$ が φ に対してただ1つに定まることは，$C(V)$が K と $\phi(V)$ から K-多元環として生成されることからわかり，また V に対して $C(V)$ が K-多元環の同型を除いて1意に定まることの証明は，命題1.1の後半と同様にするとよい．

例 1.28 K-加群 V において，内積を任意の $u, v\in V$ に対して $\langle u, v\rangle=0$ で与えると，V は対称な内積をもつ K-加群になる．この V の Clifford K-多元環 $C(V)$ は V の外積 K-多元環 $\Lambda(V)$ のことにほかならない．

例 1.29 対称な内積をもつ1次元 K-加群 V の Clifford K-多元環 $C(V)$ は，K-加群としては $C(V)=K\oplus V$ となるので2次元である．積は $1\in K$ が単位元であり，$u\in V$ が $\langle u, u\rangle=c$ ならば $u^2=c$, で与えられている．

Clifford K-多元環 $C(V)$ は，つぎに述べるような $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環の構造をもっていることを示そう．

定義 $A=A^0\oplus A^1$ が **$\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環**であるとは，つぎの3つの条件をみたすことである．

(1) A は K-多元環である．

(2) A は部分 K-加群 A^0, A^1 の直和である．

(3) $A^0A^0\subset A^0$, $A^1A^1\subset A^0$, $A^0A^1\subset A^1$, $A^1A^0\subset A^1$

命題 1.31 対称な内積をもつ K-加群 V の Clifford K-多元環 $C(V)$ は $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環である：

$$C(V)=C^0(V)\oplus C^1(V)$$

証明 命題1.30の証明と同じ記号を用いる．写像 π: $T(V)\to T(V)/\mathfrak{a}(V)=C(V)$ を $\pi(a)=[a]$ と定義して

$$C^0(V)=\pi(\bigoplus_{k\geqq 0}T^{2k}(V)),\ C^1(V)=\pi(\bigoplus_{k\geqq 0}T^{2k+1}(V))$$

とおくと $C(V)$ は$C^0(V)$ と $C^1(V)$ の直和であり（$(\tau(u))^2-\langle u, u\rangle$ が偶数次元の元であることに注意すると，直和であることが容易にわかる），さらに $\boldsymbol{Z}_2$-次数つき K-多元環になっている．

一般に $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環 $A = A^0 \oplus A^1$ において，A^0 は A の部分 K - 多元環になっている．したがって Clifford K - 多元環 $C(V)$ において，$C^0(V)$ は $C(V)$ の部分 K - 多元環である．

補題 1.32 対称な内積をもつ K - 加群 V の Clifford K - 多元環 $(C(V), \phi)$ において，$\boldsymbol{u}, v \in V$ が

$$\langle u, v\rangle = 0 \text{ をみたすならば } \phi(u)\phi(v) + \phi(v)\phi(u) = 0$$

がなりたつ．

証明 $0 = (\phi(u+v))^2 - \langle u+v, u+v\rangle$

$$= (\phi(u))^2 + \phi(u)\phi(v) + \phi(v)\phi(u) + (\phi(v))^2 - \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle - \langle v, v\rangle$$

$$= \phi(u)\phi(v) + \phi(v)\phi(u)$$

定義 $A = A^0 \oplus A^1$, $B = B^0 \oplus B^1$ を $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環とする．A, B から新しい $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環 $A \widehat{\otimes}_K B$ をつぎのように定義する．まず K - 加群の直和

$$A \widehat{\otimes}_K B = (A \widehat{\otimes}_K B)^0 \oplus (A \widehat{\otimes}_K B)^1$$

$$(A \widehat{\otimes}_K B)^0 = (A^0 \otimes_K B^0) \oplus (A^1 \otimes_K B^1), \ (A \widehat{\otimes}_K B)^1 = (A^0 \otimes_K B^1) \oplus (A^1 \otimes_K B^0)$$

において積を

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{sr'}(aa' \otimes bb') \qquad a' \in A^{r'}, b \in B^s$$

をみたすように定義して $A \widehat{\otimes}_K B$ に K - 多元環の構造をいれる．

$A = A^0 \oplus A^1$, $B = B^0 \oplus B^1$ を $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環とする．K - 多元環準同型写像 $f: A \to B$ が

$$f(A^0) \subset B^0, \quad f(A^1) \subset B^1$$

をみたすとき，f を **$\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環準同型写像** ということにするならば，補題 1.21 と同様つぎの補題を得る．

補題 1.33 $A = A^0 \oplus A^1$, $B = B^0 \oplus B^1$, $C = C^0 \oplus C^1$ を $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環とする．2つの $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環準同型写像 $f: A \to C$, $g: B \to C$ が

$$f(a)g(b) = (-1)^{rs}g(b)f(a) \qquad a \in A^r, b \in B^s$$

をみたすならば，K - 準同型写像 $h: A \widehat{\otimes}_K B \to C$ を

$$h(a \otimes b) = f(a)g(b)$$

をみたすように定義するとき，h も $\boldsymbol{Z}_2$ - 次数つき K - 多元環準同型写像になる．

補題 1.34 対称な内積をもつ K - 加群 V が部分 K - 加群 V_1, V_2 の直交する直和であるとする：

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad \langle V_1, V_2 \rangle = 0$$

$(C(V_1), \phi_1)$, $(C(V_2), \phi_2)$ をそれぞれ V_1, V_2 の Clifford K-多元環とする．このとき写像 Φ: $V \to C(V_1) \hat{\otimes}_K C(V_2)$ を

$$\Phi(u_1 + u_2) = \phi_1(u_1) \otimes 1 + 1 \otimes \phi_2(u_2) \qquad u_1 \in V_1,\ u_2 \in V_2$$

と定義すると，$(C(V_1) \hat{\otimes}_K C(V_2), \Phi)$ は V の Clifford K-多元環になる．すなわち，つぎの K-多元環の同型が存在する．

$$C(V_1 \oplus V_2) \cong C(V_1) \hat{\otimes}_K C(V_2)$$

証明　まず $(\Phi(u))^2 = \langle u, u \rangle$, $u \in V$ がなりたつ．実際，$u = u_1 + u_2$, $u_1 \in V_1$, $u_2 \in V_2$ と表わすと

$$\begin{aligned}(\Phi(u))^2 &= (\Phi(u_1 + u_2))^2 = (\phi_1(u_1) \otimes 1 + 1 \otimes \phi_2(u_2))^2 \\ &= (\phi_1(u_1))^2 \otimes 1 + \phi_1(u_1) \otimes \phi_2(u_2) - \phi_1(u_1) \otimes \phi_2(u_2) + 1 \otimes (\phi_2(u_2))^2 \\ &= \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle = \langle u, u \rangle\end{aligned}$$

である．このあとの証明は補題1.22と同じである（補題1.20, 1.21の代りに補題1.32, 1.33を用いる）ので省略する．

約束　Clifford K-多元環 $(C(V), \phi)$ における写像 ϕ: $V \to C(V)$ は単射 K-準同型写像であるから，V の元 u と $C(V)$ の元 $\phi(u)$ を同一視して，V を $C(V)$ の部分 K-加群とみなすことにする：$V \subset C(V)$．すなわち $\phi(u)$, $u \in V$ を単に u とかく．

命題 1.35　対称な内積をもつ n 次元 K-加群 V に直交基 $e_1, \cdots, e_n$ ($\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$) を選ぶことができたとする．このとき Clifford K-多元環 $C(V)$ において

$$1,\ e_1, \cdots, e_n,\ e_1e_2, \cdots, \underset{(i<j)}{e_ie_j}, \cdots, e_{n-1}e_n, \cdots, \underset{(i_1<\cdots<i_r)}{e_{i_1}\cdots e_{i_r}}, \cdots, e_1\cdots e_n$$

は $C(V)$ の基になる．特に $C(V)$ の次元は 2^n である：

$$\dim_K C(V) = 2^n$$

また $C^0(V)$ において

$$1, \cdots, \underset{(i<j)}{e_ie_j}, \cdots, \underset{(i_1<\cdots<i_{2m})}{e_{i_1}\cdots e_{i_{2m}}}, \cdots$$

は $C^0(V)$ の基になる．したがって $C^0(V)$ の次元は 2^{n-1} である：

$$\dim_K C^0(V) = 2^{n-1}$$

なお $\langle e_i, e_i \rangle = c_i$, $i = 1, \cdots, n$ であるとするとき，$e_1, \cdots, e_n$ の積に関し

$$\begin{cases} e_i^2 = c_i & i = 1, \cdots, n \\ e_ie_j + e_je_i = 0 & i \neq j \end{cases}$$

の関係がある.

証明　補題1.34を繰返し用いると，命題1.23と全く同じようにして証明することができる.

(3) Clifford K-多元環 $C(K_-{}^n)$, $C(K_+{}^n)$ の構造

Clifford K-多元環 $C(K_-{}^n)$, $C(K_+{}^n)$ の構造は，K-多元環 $M(n, F)$（例1.20）を用いて表わせるという意味で完全にわかっている．そして $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$, $C(\boldsymbol{R}_+{}^n)$, $C(\boldsymbol{C}_-{}^n)$ がそれぞれ（ある種の）周期8,2をもっていることは注目すべきことである（これは K 理論の周期性に密接に関係している [1]）．また $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$, $C(\boldsymbol{C}_-{}^n)$ はいろいろの面において，スピノル群 $Spin(n)$ に関係しているのである.

$K_-{}^n$, $K_+{}^n$ における標準基を $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ とし，それらを $C(K_-{}^n)$, $C(K_+{}^n)$ の元とみるとき，それぞれ $e_1, \cdots, e_n$; $e_1', \cdots, e_n'$ とかくことにする．積はそれぞれ

$$\begin{cases} e_i^2 = -1 \\ e_ie_j + e_je_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_i'^2 = 1 & i = 1, \cdots, n \\ e_i'e_j' + e_j'e_i' = 0 & i \neq j \end{cases}$$

で与えられている（命題1.35).

命題 1.36　いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

(1)　$C(\boldsymbol{R}_-{}^1) \cong \boldsymbol{C}$　　$C(\boldsymbol{R}_+{}^1) \cong \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$

(2)　$C(\boldsymbol{R}_-{}^2) \cong \boldsymbol{H}$　　$C(\boldsymbol{R}_+{}^2) \cong M(2, \boldsymbol{R})$

証明　(1)　$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^1) \to \boldsymbol{C}$

$$1 \to 1, \qquad e_1 \to \boldsymbol{i}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_+{}^1) \to \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$

$$1 \to (1, 1),\ e_1' \to (1, -1)$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

(2)　$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^2) \to \boldsymbol{H}$

$$1 \to 1,\ e_1 \to \boldsymbol{i},\ e_2 \to \boldsymbol{j},\ e_1e_2 \to \boldsymbol{k}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_+{}^2) \to M(2, \boldsymbol{R})$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ e_1' \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ e_2' \to \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},\ e_1'e_2' \to \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

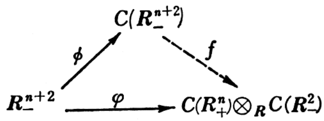
補題 1.37 いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

$$C(\boldsymbol{R}_-^{n+2}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^2) \qquad C(\boldsymbol{R}_+^{n+2}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_+^2)$$

証 明 $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $\varphi\colon \boldsymbol{R}_-^{n+2} \to C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^2)$ を

$$\varphi(e_i) = 1 \otimes e_i \qquad i = 1, 2$$

$$\varphi(e_j) = e_{j-2}' \otimes e_1 e_2 \quad j = 3, \cdots, n+2$$



をみたすように定義すると，φ は

$$(\varphi(u))^2 = \langle u, u \rangle \qquad u \in \boldsymbol{R}_-^{n+2} \qquad \text{(i)}$$

をみたしている．実際，まず $\boldsymbol{R}_-^{n+2}$ の基 $e_1, \cdots, e_{n+2}$ に対して (i) がなりたつことを示そう．それは

$$(\varphi(e_i))^2 = (1 \otimes e_i)(1 \otimes e_i) = 1 \otimes e_i^2 = 1 \otimes (-1) = -1 = \langle e_i, e_i \rangle \quad i = 1, 2$$

$$(\varphi(e_j))^2 = (e_{j-2}' \otimes e_1 e_2)(e_{j-2}' \otimes e_1 e_2) = e_{j-2}'^2 \otimes e_1 e_2 e_1 e_2 = 1 \otimes (-1)$$
$$= -1 = \langle e_j, e_j \rangle \qquad j = 3, \cdots, n+2$$

であるからなりたつ．つぎに $\boldsymbol{R}_-^{n+2}$ の元 u が $u = u_1 + u_2$, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, $u_1, u_2 \in \boldsymbol{R}_-^{n+2}$ と表わされていて，u_1, u_2 に対して (i) がなりたつと仮定したとき，u についても (i) がなりたつことを示そう．(これがわかると $u \in \boldsymbol{R}_-^{n+2}$ は $u = \sum_{i=1}^{n+2} e_i \alpha_i$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \ (i \neq j)$ と表わされるので，上記のことを繰返すと (i) がなりたつことがわかる)．さて

$$(\varphi(u))^2 = (\varphi(u_1 + u_2))^2 = (\varphi(u_1) + \varphi(u_2))^2$$
$$= (\varphi(u_1))^2 + \varphi(u_1)\varphi(u_2) + \varphi(u_2)\varphi(u_1) + (\varphi(u_2))^2$$
$$= \langle u_1, u_1 \rangle + (\varphi(u_1)\varphi(u_2) + \varphi(u_2)\varphi(u_1)) + \langle u_2, u_2 \rangle$$

となるので

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \text{ならば} \quad \varphi(u_1)\varphi(u_2) + \varphi(u_2)\varphi(u_1) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

が証明されたとすると，上式は

$$(\varphi(u))^2 = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_1 + u_2, u_1 + u_2 \rangle = \langle u, u \rangle$$

となって (i) が証明されたことになる．(ii) を示すためにもやはり $\boldsymbol{R}_-^{n+2}$ の基 $e_1, \cdots, e_{n+2}$ に対して示しておくと十分である．しかるに e_1, e_2 に対しては

$$\varphi(e_1)\varphi(e_2) + \varphi(e_2)\varphi(e_1) = (1 \otimes e_1)(1 \otimes e_2) + (1 \otimes e_2)(1 \otimes e_1)$$
$$= 1 \otimes (e_1 e_2 + e_2 e_1) = 0$$

であり，また $e_i \ (i = 1, 2)$, $e_j \ (j = 3, \cdots, n+2)$ に対しては

$$\varphi(e_i)\varphi(e_j) + \varphi(e_j)\varphi(e_i) = (1 \otimes e_i)(e_{j-2}' \otimes e_1 e_2) + (e_{j-2}' \otimes e_1 e_2)(1 \otimes e_i)$$

$$= e_{j-2}' \otimes e_i e_1 e_2 + e_{j-2}' \otimes e_1 e_2 e_i = e_{j-2}' \otimes e_i(e_1 e_2 - e_1 e_2) = 0$$

となり，さらに e_j, e_k $(j, k = 3, \cdots, n+2,\ j \neq k)$ に対しても

$$\varphi(e_j)\varphi(e_k) + \varphi(e_k)\varphi(e_j) = (e_{j-2}' \otimes e_1 e_2)(e_{k-2}' \otimes e_1 e_2) + (e_{k-2}' \otimes e_1 e_2)(e_{j-2}' \otimes e_1 e_2)$$
$$= (e_{j-2}' e_{k-2}' + e_{k-2}' e_{j-2}') \otimes e_1 e_2 e_1 e_2 = 0 \otimes (-1) = 0$$

となるから (ii) がなりたつ．以上で (i) が示された．よって Clifford $\boldsymbol{R}$ - 多元環の性質より ($\varphi = f\phi$ をみたす) $\boldsymbol{R}$ - 多元環準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-^{n+2}) \to C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^2)$ が存在する．この f が $\boldsymbol{R}$ - 多元環同型写像であることを示そう．まず $\dim_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^{n+2}) = 2^{n+2}$ (命題 1.35)，$\dim_{\boldsymbol{R}} (C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^2)) = 2^n 2^2 = 2^{n+2}$ (命題 1.35，補題 1.10) で両者の次元が等しいことに注意しよう．f により

$$1 \to 1 \otimes 1$$
$$e_i \to 1 \otimes e_i \qquad i = 1, 2$$
$$e_j \to e_{j-2}' \otimes e_1 e_2 \qquad j = 3, \cdots, n+2$$
$$e_i e_j \to (1 \otimes e_i)(e_{j-2}' \otimes e_1 e_2) \qquad i = 1, 2,\ j = 3, \cdots, n+2$$
$$= (-1)^i e_{j-2}' \otimes e_{i+(-1)^{i+1}}$$
$$e_j e_k \to (e_{j-2}' \otimes e_1 e_2)(e_{k-2}' \otimes e_1 e_2) \qquad j, k = 3, \cdots, n+2$$
$$= -e_{j-2}' e_{k-2}' \otimes 1$$

に移り，以下同様に $e_{i_1} \cdots e_{i_r}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ も上記の右辺のような形の元に移る．このことから f が単射であることがわかる．よって補題 1.4 より f は全単射となるので，f は $\boldsymbol{R}$ - 多元環同型写像である：$C(\boldsymbol{R}_-^{n+2}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^2)$．もう 1 つの式も

$$\varphi(e_i') = 1 \otimes e_i' \qquad i = 1, 2$$
$$\varphi(e_j') = e_{j-2} \otimes e_1' e_2' \qquad j = 3, \cdots, n+2$$

をみたす $\boldsymbol{R}$ - 準同型写像 $\varphi: \boldsymbol{R}_+^{n+2} \to C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_+^2)$ を用いると，上記と同様な方法で証明することができる．

補題 1.38 $\boldsymbol{C}$ - 多元環として同型である．

$$C(\boldsymbol{C}_-^n) \cong C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong C(\boldsymbol{R}_+^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong C(\boldsymbol{C}_+^n)$$

証明 $\boldsymbol{C}$ - 準同型写像 $\varphi: \boldsymbol{C}_-^n \to C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を

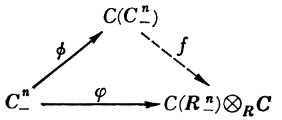
$$\varphi(e_i) = e_i \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたすようにつくると，φ は

$$(\varphi(u))^2 = \langle u, u \rangle \qquad u \in \boldsymbol{C}_-^n \tag{i}$$

をみたしている．実際，このためには $(\varphi(e_i))^2 = \langle e_i, e_i \rangle$ と $\varphi(e_i)\varphi(e_j) + \varphi(e_j)\varphi(e_i) = 0$

$(i \neq j)$ を証明すれば（これらは自明），補題1.37の証明と同じようにして（i）が示される.（i）が示されると，Clifford $\boldsymbol{C}$-多元環の性質より（$\varphi = f\phi$ をみたす）$\boldsymbol{C}$-多元環準同型写像 f: $C(\boldsymbol{C}_-{}^n) \to C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ が存在する.



この f は $C(\boldsymbol{C}_-{}^n)$ の基 $1, \cdots, e_i, \cdots, \cdots, e_1 \cdots e_n$ を $C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ の基 $1 \otimes 1, \cdots, e_i \otimes 1, \cdots, \cdots, e_1 \cdots e_n \otimes 1$ に移すので，f は $\boldsymbol{C}$-多元環同型写像である（補題1.4）. よって $C(\boldsymbol{C}_-{}^n) \cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ である. $C(\boldsymbol{C}_+{}^n) \cong C(\boldsymbol{R}_+{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$, $C(\boldsymbol{C}_-{}^n) \cong C(\boldsymbol{R}_+{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を証明するためには，それぞれ

$$\varphi(e_i') = e_i' \otimes 1, \qquad \varphi(e_i) = e_i' \otimes \boldsymbol{i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたす $\boldsymbol{C}$-準同型写像 φ: $\boldsymbol{C}_+{}^n \to C(\boldsymbol{R}_+{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$, φ: $\boldsymbol{C}_-{}^n \to C(\boldsymbol{R}_+{}^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を用いて上記と同じようにして証明するとよい.

補題 1.39　いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

（1）$\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$

（2）$\boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong M(2, \boldsymbol{C})$　（$\boldsymbol{C}$-多元環としても同型である）.

（3）$\boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H} \cong M(4, \boldsymbol{R})$

証明　（1）$\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong C(\boldsymbol{R}_-{}^1) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$（命題1.36（1））$\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^1) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$（補題1.38）

$$\cong (\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \text{（命題1.36（1））} \cong \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C} \text{（補題1.15（4））}$$

この同型対応を具体的に与えてみよう. $\boldsymbol{R}$-準同型写像 f: $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$

$$1 \otimes 1 \to (1, 1), \qquad 1 \otimes \boldsymbol{i} \to (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$$
$$\boldsymbol{i} \otimes 1 \to (\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}), \qquad \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} \to (-1, 1)$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

（2）$\boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \cong C(\boldsymbol{R}_-{}^2) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$（命題1.36（2））$\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^2) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$（補題1.38）

$$\cong M(2, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \text{（命題1.36（2））} \cong M(2, \boldsymbol{C}) \text{（補題1.16）}$$

この同型対応を具体的に与えてみよう. $\boldsymbol{R}$-準同型写像 f: $\boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \to M(2, \boldsymbol{C})$

$$1 \otimes 1 \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \qquad 1 \otimes \boldsymbol{i} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \\ & \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{i} \otimes 1 \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \\ & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} \to \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{j} \otimes 1 \to \begin{pmatrix} & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{i} \to \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} \otimes 1 \to \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{i} \to \begin{pmatrix} & -\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}$ - 多元環の同型を与えている. つぎに $\boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$, $M(2,\boldsymbol{C})$ をともに $\boldsymbol{C}$ - 多元環とみるとき, $\boldsymbol{C}$ - 準同型写像 $f\colon \boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\to M(2,\boldsymbol{C})$

$$1\otimes 1\to\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{j}\otimes 1\to\begin{pmatrix}&\boldsymbol{i}\\\boldsymbol{i}&\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{i}\otimes 1\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\\&-\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{k}\otimes 1\to\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{C}$ - 多元環の同型を与えている.

（3） 写像 $f\colon \boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{H}\to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})$ を

$$f(a\otimes b)(u)=au\bar{b}^{\dagger}\qquad a,b,u\in\boldsymbol{H}$$

と定義すると, f は $\boldsymbol{R}$ - 多元環準同型写像である. 実際, ここでは f が積を保つことのみ確かめておこう. それは

$$f((a\otimes b)(a'\otimes b'))u=f(aa'\otimes bb')u=(aa')u\overline{(bb')}=a(a'u\bar{b}')\bar{b}$$
$$=f(a\otimes b)(f(a'\otimes b')u)$$

よりなりたつ. この f が $\boldsymbol{R}$ - 多元環同型写像であることを示そう. そのためには, $\dim_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{H})=16$（補題1.10), $\dim_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}))=16$（例1.17）であるから, f が全射であることを示すと十分である（補題1.4). さて

$$f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})(1)=\boldsymbol{i}1\bar{\boldsymbol{i}}=1,\qquad f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}\bar{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{i}$$

$$f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})(\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\bar{\boldsymbol{i}}=-\boldsymbol{j},\qquad f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}\bar{\boldsymbol{i}}=-\boldsymbol{k}$$

であるから, $\boldsymbol{H}$ の $\boldsymbol{R}$ - 基 $1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を用いて $f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})$ を行列で表わす（例1.21）と

$$f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i})=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$ になる. 同様に, $$f(\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j})=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

$$f(\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad f(1\otimes 1)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$ となるので, これらから

$$f\left(\frac{1}{4}(1\otimes 1+\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})\right)=E_1$$

$$f\left(\frac{1}{4}(1\otimes 1+\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})\right)=E_2$$

---

† $a=\alpha+\beta\boldsymbol{i}+\gamma\boldsymbol{j}+\delta\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{H}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\boldsymbol{R}$ に対し, $\bar{a}$ で a の共役元 $\alpha-\beta\boldsymbol{i}-\gamma\boldsymbol{j}-\delta\boldsymbol{k}$ を表わす.

$$f\left(\frac{1}{4}(1\otimes 1-\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})\right)=E_3$$

$$f\left(\frac{1}{4}(1\otimes 1-\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k})\right)=E_4$$

となる．同様にすると，$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{H})\cong M(n,\boldsymbol{R})$（例1.21）の基の各元 E_{ij} も $f(1\otimes\boldsymbol{i})$, $f(\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j})$, $\cdots$ 等で表わされ，E_{ij} が f の像に含まれることがわかる．よって f は全射である．以上で f が $\boldsymbol{R}$-多元環同型写像であることが示された．

補題 1.40 いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である．

（1） $M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{R})\cong M(nm,\boldsymbol{R})$

$M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{C})\cong M(nm,\boldsymbol{C})$

$M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{H})\cong M(nm,\boldsymbol{H})$

（2） $M(n,\boldsymbol{C})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{C})\cong M(nm,\boldsymbol{C})\oplus M(nm,\boldsymbol{C})$

$M(n,\boldsymbol{C})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{H})\cong M(2nm,\boldsymbol{C})$

（3） $M(n,\boldsymbol{H})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{H})\cong M(4nm,\boldsymbol{R})$

証明 （1） 写像 $f\colon M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{R})\to M(nm,\boldsymbol{R})$ を

$$f(A\otimes B)=\begin{pmatrix}Ab_{11}&\cdots&Ab_{1m}\\&\cdots\cdots&\\Ab_{m1}&\cdots&Ab_{mm}\end{pmatrix}^{\dagger}\qquad B=(b_{lk})$$

と定義すると f は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている．さて

$$M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{C})\cong M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\ (\text{補題}1.16)$$
$$\cong M(nm,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\ (\text{上記})\cong M(nm,\boldsymbol{C})\ (\text{補題}1.16)$$

である．$M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{H})\cong M(nm,\boldsymbol{H})$ についても同様である．

（2） $M(n,\boldsymbol{C})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{C})\cong M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$（補題1.16）

$\cong M(n,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(m,\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$（補題1.15 (1)）

---

† 行列 $A\in M(n,K)$, $B=(b_{lk})\in M(m,K)$ に対し行列 $A\otimes B\in M(nm,K)$ を

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}Ab_{11}&\cdots&Ab_{1m}\\&\cdots\cdots\cdots&\\Ab_{m1}&\cdots&Ab_{mm}\end{pmatrix}$$

で定義し，A と B の **Kronecker 積**という．Kronecker 積に関してつぎの諸公式がなりたつ．

（1） $A\otimes(B+B')=(A\otimes B)+(A\otimes B')$

$(A+A')\otimes B=(A\otimes B)+(A'\otimes B)\qquad A,A'\in M(n,K),\ B,B'\in M(m,K)$

（2） $(A\alpha)\otimes B=(A\otimes B)\alpha=A\otimes(B\alpha)\qquad \alpha\in K$

（3） $(A\otimes B)(A'\otimes B')=AA'\otimes BB'$

$\cong M(nm, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C})$ (上記 (1), 補題 1.39 (1))

$\cong (M(nm, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}) \oplus (M(nm, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C})$ (補題 1.15 (4))

$\cong M(nm, \boldsymbol{C}) \oplus M(nm, \boldsymbol{C})$ (補題 1.16)

$M(n, \boldsymbol{C}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{H}) \cong M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H}$ (補題 1.16)

$\cong M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ (補題 1.15 (1))

$\cong M(nm, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{C})$ (上記 (1), 補題 1.39 (2))

$\cong M(2nm, \boldsymbol{C})$ (上記 (1))

(3) $M(n, \boldsymbol{H}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{H}) \cong M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H}$ (補題1.16)

$\cong M(n, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(m, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H}$ (補題 1.15 (1))

$\cong M(nm, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(4, \boldsymbol{R})$ (上記 (1), 補題 1.39 (3))

$\cong M(4nm, \boldsymbol{R})$ (上記 (1))

命題 1.41 $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

$$C(\boldsymbol{R}_-{}^4) \cong M(2, \boldsymbol{H}) \cong C(\boldsymbol{R}_+{}^4)$$

証明 $C(\boldsymbol{R}_-{}^4) \cong C(\boldsymbol{R}_+{}^2) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-{}^2)$ (補題 1.37) $\cong M(2, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H}$ (命題 1.36 (2))

$\cong M(2, \boldsymbol{H})$ (補題 1.16)

この同型対応を具体的に与えてみよう. $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $f: C(\boldsymbol{R}_-{}^4) \to M(2, \boldsymbol{H})$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \to \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}, \quad e_2 \to \begin{pmatrix} j & \\ & j \end{pmatrix}$$

$$e_3 \to \begin{pmatrix} k & \\ & -k \end{pmatrix}, \quad e_4 \to \begin{pmatrix} & k \\ k & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2 \to \begin{pmatrix} k & \\ & k \end{pmatrix}, \quad e_1e_3 \to \begin{pmatrix} -j & \\ & j \end{pmatrix}, \quad e_1e_4 \to \begin{pmatrix} & -j \\ -j & \end{pmatrix}$$

$$e_2e_3 \to \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \quad e_2e_4 \to \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad e_3e_4 \to \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2e_3 \to \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1e_2e_4 \to \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_3e_4 \to \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad e_2e_3e_4 \to \begin{pmatrix} & -j \\ j & \end{pmatrix}$$

$$e_1e_2e_3e_4 \to \begin{pmatrix} & -k \\ k & \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている. $C(\boldsymbol{R}_+{}^4)$ についても

$$C(\boldsymbol{R}_+{}^4)\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^2)\otimes_{\boldsymbol{R}}C(\boldsymbol{R}_+{}^2)\cong \boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{R})\cong M(2,\boldsymbol{H})$$

であるが, 具体的には $\boldsymbol{R}$-多元環準同型写像 f: $C(\boldsymbol{R}_+{}^4)\to M(2,\boldsymbol{H})$

$$e_1'\to\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},\quad e_2'\to\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$e_3'\to\begin{pmatrix} & \boldsymbol{i}\\ -\boldsymbol{i} & \end{pmatrix},\quad e_4'\to\begin{pmatrix} & \boldsymbol{j}\\ -\boldsymbol{j} & \end{pmatrix}$$

が $\boldsymbol{R}$-多元環の同型を与えている.

補題 1.42 いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

$$C(\boldsymbol{R}_-{}^{n+4})\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})\qquad C(\boldsymbol{R}_+{}^{n+4})\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})$$

証明 $C(\boldsymbol{R}_-{}^{n+4})\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^{n+2})\otimes_{\boldsymbol{R}}C(\boldsymbol{R}_-{}^2)$ (補題 1.37)

$\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}C(\boldsymbol{R}_+{}^2)\otimes_{\boldsymbol{R}}C(\boldsymbol{R}_-{}^2)$ (補題 1.37)

$\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}C(\boldsymbol{R}_-{}^4)\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})$ (命題 1.41)

$C(\boldsymbol{R}_+{}^{n+4})$ についても同様である.

命題 1.43 いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である.

$$C(\boldsymbol{R}_-{}^{n+8})\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(16,\boldsymbol{R})\qquad C(\boldsymbol{R}_+{}^{n+8})\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(16,\boldsymbol{R})$$

証明 $C(\boldsymbol{R}_-{}^{n+8})\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^{n+4})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})$ (補題 1.42)

$\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})\otimes_{\boldsymbol{R}}M(2,\boldsymbol{H})\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\otimes_{\boldsymbol{R}}M(16,\boldsymbol{R})$ (補題 1.40 (3))

$C(\boldsymbol{R}_+{}^{n+8})$ についても同様である.

命題 1.44 いずれも $\boldsymbol{C}$-多元環として同型である.

(1) $C(\boldsymbol{C}_-{}^1)\cong\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}\cong C(\boldsymbol{C}_+{}^1)$

(2) $C(\boldsymbol{C}_-{}^2)\cong M(2,\boldsymbol{C})\cong C(\boldsymbol{C}_+{}^2)$

証明 (1) $C(\boldsymbol{C}_-{}^1)\cong C(\boldsymbol{C}_+{}^1)\cong C(\boldsymbol{R}_+{}^1)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ (補題 1.38)

$\cong(\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ (命題 1.36 (1)) $\cong(\boldsymbol{R}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C})\oplus(\boldsymbol{R}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C})\cong\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}$

この同型対応を具体的に与えてみよう. $\boldsymbol{C}$-準同型写像 f: $C(\boldsymbol{C}_-{}^1)\to\boldsymbol{C}\oplus\boldsymbol{C}$

$$1\to(1,1),\qquad e_1\to(\boldsymbol{i},-\boldsymbol{i})$$

は $\boldsymbol{C}$-多元環の同型を与えている.

(2) $C(\boldsymbol{C}_-{}^2)\cong C(\boldsymbol{R}_-{}^2)\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ (補題 1.38) $\cong\boldsymbol{H}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}$ (命題 1.36 (2))

$\cong M(2,\boldsymbol{C})$ (補題 1.39 (2))

である. 別証明として

$C(\boldsymbol{C}_-^2) \cong C(\boldsymbol{C}_+^2) \cong C(\boldsymbol{R}_+^2) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ （補題1.38）$\cong M(2, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ （命題1.36 (2)）

$\cong M(2, \boldsymbol{C})$ （補題1.29）

としてもよい．この同型対応を具体的に与えたいならば，$\boldsymbol{C}$ - 準同型写像 $f: C(\boldsymbol{C}^2) \to M(2, \boldsymbol{C})$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 \to \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$$

$$e_2 \to \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad e_1e_2 \to \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

が $\boldsymbol{C}$ - 多元環の同型を与えている．（$C(\boldsymbol{C}_+^2) \cong M(2, \boldsymbol{C})$については命題1.36 (2) $C(\boldsymbol{R}_+^2) \cong M(2, \boldsymbol{R})$ の同型写像を参照のこと）．

命題 1.45 $\boldsymbol{C}$ - 多元環として同型である．

$$C(\boldsymbol{C}_-^{n+2}) \cong C(\boldsymbol{C}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{C}} M(2, \boldsymbol{C})$$

証明 $C(\boldsymbol{C}_-^{n+2}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{n+2}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ （補題1.38）

$\cong (C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_+^2)) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ （補題1.37）

$\cong (C(\boldsymbol{R}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}) \otimes_{\boldsymbol{C}} (C(\boldsymbol{R}_+^2) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C})$ （命題1.28 (2) 参照）

$\cong C(\boldsymbol{C}_-^n) \otimes_{\boldsymbol{C}} M(2, \boldsymbol{C})$ （補題1.38，命題1.44 (2)）

命題1.43，1.45 が示すように，$C(\boldsymbol{R}_\pm^n)$, $C(\boldsymbol{C}_\pm^n)$ はそれぞれある種の周期8, 2 をもつことがわかった．したがって，つぎの命題の表を完成すれば，Clifford 多元環 $C(\boldsymbol{R}_\pm^n)$, $C(\boldsymbol{C}_\pm^n)$ の構造がわかったことになる．

命題 1.46 $\boldsymbol{R}$ - 多元環同型 $\boldsymbol{C}$ - 多元環同型

n	$C(\boldsymbol{R}_-^n)$	$C(\boldsymbol{R}_+^n)$	$C(\boldsymbol{C}_\pm^n)$
1	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$
2	$\boldsymbol{H}$	$M(2, \boldsymbol{R})$	$M(2, \boldsymbol{C})$
3	$\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$	$M(2, \boldsymbol{C})$	$M(2, \boldsymbol{C}) \oplus M(2, \boldsymbol{C})$
4	$M(2, \boldsymbol{H})$	$M(2, \boldsymbol{H})$	$M(4, \boldsymbol{C})$
5	$M(4, \boldsymbol{C})$	$M(2, \boldsymbol{H}) \oplus M(2, \boldsymbol{H})$	$M(4, \boldsymbol{C}) \oplus M(4, \boldsymbol{C})$
6	$M(8, \boldsymbol{R})$	$M(4, \boldsymbol{H})$	$M(8, \boldsymbol{C})$
7	$M(8, \boldsymbol{R}) \oplus M(8, \boldsymbol{R})$	$M(8, \boldsymbol{C})$	$M(8, \boldsymbol{C}) \oplus M(8, \boldsymbol{C})$
8	$M(16, \boldsymbol{R})$	$M(16, \boldsymbol{R})$	$M(16, \boldsymbol{C})$

証明 $C(\boldsymbol{R}_-^n)$ $C(\boldsymbol{R}_+^n)$

1,2. 命題1.36

3. $C(\boldsymbol{R}_-^{3}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{1}) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_-^{2})$
$\cong (\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{H}$
$\cong \boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}$

4. 命題 1.41

5. $C(\boldsymbol{R}_-^{5}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^{1}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(4, \boldsymbol{C})$

6. $C(\boldsymbol{R}_-^{6}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^{2}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong \boldsymbol{H} \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(8, \boldsymbol{R})$

7. $C(\boldsymbol{R}_-^{7}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^{3}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong (\boldsymbol{H} \oplus \boldsymbol{H}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(8, \boldsymbol{R}) \oplus M(8, \boldsymbol{R})$

8. $C(\boldsymbol{R}_-^{8}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^{4}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(2, \boldsymbol{H}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(16, \boldsymbol{R})$

1,2. 命題1.36

3. $C(\boldsymbol{R}_+^{3}) \cong C(\boldsymbol{R}_-^{1}) \otimes_{\boldsymbol{R}} C(\boldsymbol{R}_+^{2})$
$\cong \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{R})$
$\cong M(2, \boldsymbol{C})$

4. 命題1.41

5. $C(\boldsymbol{R}_+^{5}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{1}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong (\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(2, \boldsymbol{H}) \oplus M(2, \boldsymbol{H})$

6. $C(\boldsymbol{R}_+^{6}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{2}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(2, \boldsymbol{R}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(4, \boldsymbol{H})$

7. $C(\boldsymbol{R}_+^{7}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{3}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(2, \boldsymbol{C}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(8, \boldsymbol{C})$

8. $C(\boldsymbol{R}_+^{8}) \cong C(\boldsymbol{R}_+^{4}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(2, \boldsymbol{H}) \otimes_{\boldsymbol{R}} M(2, \boldsymbol{H})$
$\cong M(16, \boldsymbol{R})$

命題1.46の表と $C(K_\pm{}^n)$ の周期性（命題1.43, 1.45）よりつぎの命題を得る．これはスピノル群 $Spin(n)$ の表現と関係することになる．

命題 1.47 （1） いずれも $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である．

$$C(\boldsymbol{R}_-^{8n-2}) \cong M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R}) \qquad C(\boldsymbol{R}_-^{8n}) \cong M(2^{4n}, \boldsymbol{R})$$
$$C(\boldsymbol{R}_-^{8n-1}) \cong M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R}) \oplus M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R})$$

（2） いずれも $\boldsymbol{C}$-多元環として同型である．

$$C(\boldsymbol{C}_-^{2n-1}) \cong M(2^{n-1}, \boldsymbol{C}) \oplus M(2^{n-1}, \boldsymbol{C}) \qquad C(\boldsymbol{C}_-^{2n}) \cong M(2^n, \boldsymbol{C})$$

あとでつぎの同型関係もよく用いるので述べておく．

命題 1.48 つぎの K-多元環の同型が存在する．

$$C^0(K_-^{n}) \cong C(K_-^{n-1})$$

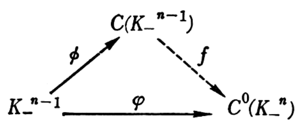
証明 K-準同型写像 φ: $K_-^{n-1} \to C^0(K_-^{n})$ を

$$\varphi(e_i) = e_i e_n \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

をみたすようにつくると，φ は

$$(\varphi(u))^2=\langle u,u\rangle \qquad u\in K_-^{n-1} \tag{i}$$

をみたしている．実際，$(\varphi(e_i))^2=e_ie_ne_ie_n=-1=\langle e_i,e_i\rangle$ と $\varphi(e_i)\varphi(e_j)+\varphi(e_j)\varphi(e_i)=e_ie_ne_je_n+e_je_ne_ie_n=e_ie_j+e_je_i=0$ $(i\neq j)$ がなりたつので，補題1.37の証明と同じようにすると（i）が示される．（i）が示されると Clifford K-多元環の性質より（$\varphi=f\phi$ をみたす）K-多元環準同型写像 $f\colon C(K_-^{n-1})\to C^0(K_-^n)$ が存在する．そして $f(e_i)=e_ie_n$, $f(e_ie_j)=f(e_i)f(e_j)=e_ie_ne_je_n=e_ie_j$ $(i<j)$ であり，さらに



$$\left.\begin{aligned} f(e_{i_1}\cdots e_{i_{2r-1}})&=e_{i_1}\cdots e_{i_{2r-1}}e_n\\ f(e_{i_1}\cdots e_{i_{2r}})&=e_{i_1}\cdots e_{i_{2r}}\end{aligned}\right. \qquad i_1<\cdots<i_{2r-1}<i_{2r}$$

となる．このように f は $C(K_-^{n-1})$ の基を $C^0(K_-^n)$ の基に移すので，f は K-多元環同型写像である（補題1.4）．

(4) $C(K_-^n)$ における写像 $t,\tilde{\kappa}$

写像 $t,\tilde{\kappa}$ は一般の Clifford K-多元環 $C(V)$ において定義されるが，ここでは $C(K_-^n)$ に話を限っておく．

定義 写像 $t,\tilde{\kappa}$[†]: $C(K_-^n)\to C(K_-^n)$ をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} {}^t1&=1, & {}^t(e_{i_1}\cdots e_{i_k})&=e_{i_k}\cdots e_{i_1}\\ \tilde{\kappa}(1)&=1, & \tilde{\kappa}(e_{i_1}\cdots e_{i_k})&=(-1)^k e_{i_1}\cdots e_{i_k}\end{aligned}\right. \qquad i_1<\cdots<i_k$$

をみたす K-準同型写像とする．

補題 1.49 (1) $a\in C(K_-^n)$ に対して

$$a\in C^0(K_-^n) \iff \tilde{\kappa}(a)=a, \qquad a\in C^1(K_-^n) \iff \tilde{\kappa}(a)=-a$$

がなりたつ．

(2) $a,b\in C(K_-^n)$ に対して

$${}^t(ab)={}^tb\,{}^ta \qquad \tilde{\kappa}(ab)=\tilde{\kappa}(a)\tilde{\kappa}(b)$$

がなりたつ．

---

† [21] 233頁では $\tilde{\kappa}(a)$ の代りに記号 a^ω が用いられている．

§8. K-Lie 環

定 義 有限次元 K-加群 $\mathfrak{g}$ の任意の2つの元 u, v に対して $\mathfrak{g}$ の元 $[u, v]$ が1意に定まり，つぎの4つの条件

(1) $[u+u', v] = [u, v] + [u', v],\ [u, v+v'] = [u, v] + [u, v']$

(2) $[u, v\alpha] = [u, v]\alpha \qquad u, u', v, v' \in \mathfrak{g},\ \alpha \in K$

(3) $[u, u] = 0$

(4) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

がなりたつとき，$\mathfrak{g}$ は **K-Lie 環** であるという．$[u, v]$ を u, v の **Lie 積** という．

例 1.30 K-加群 $M(n, K)$ において Lie 積を

$$[X, Y] = XY - YX \qquad X, Y \in M(n, K)$$

と定義すると，$M(n, K)$ は K-Lie 環になる．この K-Lie 環 $M(n, K)$ は $\mathfrak{gl}(n, K)$ とかくのが普通である．

定 義 K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ の部分 K-加群 $\mathfrak{h}$ が

$$u, v \in \mathfrak{h} \quad ならば \quad [u, v] \in \mathfrak{h}$$

をみたすとき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の **部分 K-Lie 環** という．

定 義 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を K-Lie 環とする．K-準同型写像 $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が

$$f([u, v]) = [f(u), f(v)] \qquad u, v \in \mathfrak{g}$$

をみたすとき，f を **K-Lie 環準同型写像** という．K-Lie 環準同型写像 $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が全単射であるとき，f を **K-Lie 環同型写像** という．2つの K-Lie 環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間に K-Lie 環同型写像 f が存在するとき，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は **K-Lie 環同型** であるという．

注 意 あとで述べる Lie 群 G（例 1.38）に対して，ある決められた方法により **R-Lie 環** $\mathfrak{g}$ が対応する（[2] [3] [9]）のであるが，その方法や Lie 群と Lie 環の関係については本書では全く触れていない．しかし，この書で取り扱う Lie 群 $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, G_2, F_4 の Lie 環の具体的な形については 4，5章でかなり詳しく述べておいた．

§9. 群

(1) 群

定 義 集合 G の任意の2つの元 x, y に対して G の元 xy が1意に定まり，つぎの3つの条件

(1) $x(yz) = (xy)z$

（2） G に e とかかれる特定の元が存在し，G の任意の元 x に対して $xe=x$ がなりたつ.

（3） G の任意の元 x に対して $xx^{-1}=e$ をみたす G の元 x^{-1} が存在する.

がなりたつとき，G は**群**であるという．e を群 G の**単位元**（e は1とかくことも多い），x^{-1} を x の**逆元**という．また G の任意の2つの元 x, y に対して

（4） $xy=yx$

がなりたつとき，G を**可換群**（または **Abel 群**）という．群 G の元の個数が有限であるときには G を**有限群**という．有限群 G の元の個数を群 G の**位数**という.

例 1.31　2つの整数1，-1 からなる集合 $S^0=\{1, -1\}$ は（積に関して）群をつくる．S^0 は位数2の可換群である.

例 1.32　n 個の文字 $1, \cdots, n$ の集合を N とする．N における全単射 $\sigma: N\to N$ 全体の集合 $\mathfrak{S}_n$ は写像の合成の積に関して群をつくる．この群 $\mathfrak{S}_n$ を n 次の**対称群**という．$\mathfrak{S}_n$ の元 σ を n 次の**置換**という．元 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ が

$$\sigma(i)=k_i \qquad i=1, \cdots, n$$

であるとするとき，σ を記号 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ で表わす．このとき $\mathfrak{S}_n$ の2つの元 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n\end{pmatrix}$ の積は $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n\end{pmatrix}$ で与えられている．$\mathfrak{S}_n$ は位数 $n!$ の有限群である.

定義　群 G の空でない部分集合 H が

$$x, y\in H \quad ならば \quad x^{-1}y\in H$$

をみたすとき，H を G の**部分群**という．群 G の部分群 N がさらに

$$x\in G, a\in N \quad ならば \quad xax^{-1}\in N$$

をみたしているとき，H を G の**正規部分群**という.

G を群とし，H を G の部分群とする．G において

$$x\sim y \iff x^{-1}y\in H$$

と定義すると，関係 $\sim$ は同値法則をみたす．この関係 $\sim$ により G を同値類に分けた等化集合を G/H で表わし，G の H による**等質集合**という．元 $x\in G$ を含む類を $[x]$

または xH で表わす．N が群 G の正規部分群であるときには，等質集合 G/N において積を

$$[x]\,[y] = [xy]$$

と定義すると G/N は群になる．この群 G/N を G の N による**剰余群**という．

G を群とし，H を G の部分群とするとき

$$N_H(G) = \{x \in G \mid xHx^{-1} \subset H\}$$

は H を含む G の部分群になる．この群 $N_H(G)$ を H の（G における）**正規化群**という．このとき H は群 $N_H(G)$ の正規部分群となるので，$N_H(G)/H$ は群の構造をもっている．

定義 G, G' を群とする．写像 $f: G \to G'$ が

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad x, y \in G$$

をみたすとき，f を**群準同型写像**という．群準同型写像 $f: G \to G'$ が全単射であるとき，f を**群同型写像**という．2つの群 G, G' の間に群同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**群同型**であるといい，記号 $G \cong G'$ で表わす．

つぎの補題は群準同型写像 $f: G \to G'$ が全射であるための1つの十分条件を与えている．

補題 1.50 G, G' を群，H, H' をそれぞれ G, G' の部分群とし，$f: G \to G'$ を $f(H) \subset H'$ をみたす群準同型写像とする．このとき f は写像 $\bar{f}: G/H \to G'/H'$，$\bar{f}([x]) = [f(x)]$ を誘導するが，

$f: H \to H'$，$\bar{f}: G/H \to G'/H'$ がともに全射であるならば，$f: G \to G'$ も全射である

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/H & \longrightarrow & * \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & \\ e & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G'/H' & \longrightarrow & * \end{array}$$

がなりたつ．

証明 元 $x' \in G'$ を与える．$\bar{f}$ は全射であるから，$[x'] \in G'/H'$ に対し $\bar{f}([x]) = [x']$ となる元 $x \in G$ が存在する．このとき $[f(x)] = [x']$ であるから $f(x)^{-1}x' = h' \in H'$ となる．$f: H \to H'$ も全射であるから $h' = f(h)$, $h \in H$ とおくならば，$x' = f(x)h' = f(x)f(h) = f(xh)$ となる．よって $f: G \to G'$ は全射である．

(2) 直積と半直積

以下群の単位元はつねに e で表わすことにする．また e で，e のみからなる群を表わす

こともある.

定義　G_1, G_2 を群とする. 直積集合 $G_1 \times G_2$ において積を

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

と定義すると $G_1 \times G_2$ は群になる. この群 $G_1 \times G_2$ を G_1 と G_2 の **直積** という.

定義*　G を群とし, G_1, G_2 を G の正規部分群とする. G がつぎの2つの条件

（1）　G の任意の元 x は $x = x_1x_2$, $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ と表わされる. (このとき $G = G_1G_2$ で表わす).

（2）　$x_1x_2 = e$, $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ ならば $x_1 = x_2 = e$ である. (この条件は $G_1 \cap G_2 = e$ と同じである).

をみたすとき, G は G_1 と G_2 の **直積** であるといい, $G = G_1 \times G_2$ で表わす.

群の直積より少し条件の弱い半直積について説明しよう.

定義　G を群とし, N を G の正規部分群, H を G の部分群とする. G が条件

$$G = NH, \quad N \cap H = e$$

をみたすとき, G は N と H の **半直積** であるという. (さらに H が G の正規部分群であるときが直積 $G = N \times H$ のことである).

定義　群 G_n と群準同型写像 f_n: $G_n \to G_{n-1}$ の系列

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

において, すべての n に対して

$$\mathrm{Im}\, f_{n+1} = \mathrm{Ker} f_n{}^{\dagger}$$

がなりたつとき, この系列は **完全** であるという. 特につぎの形の完全系列

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow e$$

を **短完全系列** ということがある. このとき j は単射群準同型写像であり, p は全射群準同型写像である. また $\mathrm{Im} j$ は N に群同型な G の正規部分群になる.

群の短完全系列

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow e$$

† G, G' を群とし, f: $G \to G'$ を群準同型写像とする. G の f による像 $f(G)$ は G' の部分群となるが, この群 $f(G)$ を $\mathrm{Im} f$ とかく. また G' の単位元 e の f による逆像 $f^{-1}(e)$ は G の正規部分群となるが, この群 $f^{-1}(e)$ を $\mathrm{Ker} f$ とかき, f の **核** という. なお R, R' を環とし, f: $R \to R'$ を環準同型写像とするとき, R' の零元 0 の逆像 $f^{-1}(0)$ を $\mathrm{Ker} f$ とかき, f の **核** という. このとき $\mathrm{Ker} f$ は R のイデアルになる.

において

$$ps = 1$$

をみたす群準同型写像 $s: H \to G$（この s は単射(群準同型写像)になる）が存在するとき，この完全系列は**分裂する**という．

補題 1.51 （1） Gを群とし，NをGの正規部分群，HをGの部分群とする．GがNとHの半直積であるならば，つぎの分裂する短完全系列が存在する．

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow e$$

（2） 逆に

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow e, \quad ps = 1$$

を群の分裂する短完全系列とすると，Gは $j(N)$ と$s(H)$ の半直積になる：

$$G = j(N)s(H), \qquad j(N) \cap s(H) = e$$

証明 （1） 写像 $j: N \to G$ を包含写像とする．G の元 x は $x = ah,\ a \in N,\ h \in H$ と1通りに表わせるので，写像 $p: G \to H$ を $p(x) = h$ と定義する．このとき p は群準同型写像になる．実際，$x, x' \in G$ が $x = ah,\ x' = a'h',\ a, a' \in N,\ h, h' \in H$ であるとするとき

$$xx' = aha'h' = (a(ha'h^{-1}))hh' \qquad a(ha'h^{-1}) \in N,\ hh' \in H$$

より $p(xx') = hh' = p(x)p(x')$ となるからである．さて系列

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow e$$

は完全である．実際，j は当然単射群準同型写像であり，また $p(h) = h,\ h \in H$ であるから p は全射である．そして $\mathrm{Im} j = \mathrm{Ker} p$ も明らかであるから，系列は完全である．さらに，この系列は分裂している．実際，$s: H \to G$ を包含写像とすると s は群準同型写像であって，$ps = 1$ をみたしている．

（2） 元 $x \in G$ に対して $p(x) = h$ とおき，G の元 $x(s(h))^{-1}$ を考えると

$$p(x(s(h))^{-1}) = p(x)p((s(h))^{-1}) = p(x)\,(ps(h))^{-1} = hh^{-1} = e$$

となる．しかるに系列は完全であるから，ある $a \in N$が存在して $x(s(h))^{-1} = j(a)$ となる．よって

$$x = j(a)s(h) \qquad a \in N,\ h \in H$$

と表わされる．つぎに $j(a)s(h) = e,\ a \in N,\ h \in H$ とするとき，

$$e = pj(a) = p((s(h))^{-1}) = (ps(h))^{-1} = h^{-1}$$

より $h=e$ を得る．さらにこれより $a=e$ もわかる．以上で G は $j(N)$ と $s(H)$ の半直積であることが示された．

(3) 群の作用

定義 G を群とし，M を集合とする．G の任意の元 x と M の任意の元 u に対して M の元 xu が1意に定まり，つぎの2つの条件

(1) $x(yu) = (xy)u$ 　　$x, y \in G, u \in M$

(2) $eu = u$ 　　e は G の単位元

がなりたつとき，G は M に**働く**という．M の1点 u_0 を動かさない G の元全体からなる G の部分群

$$G_{u_0} = \{x \in G | xu_0 = u_0\}$$

を $u_0 \in M$ における G の**等方群**（または**固定化群**）という．さらに M の任意の2点 u, v に対して $xu=v$ をみたす元 $x \in G$ が存在するとき（u は固定しておいてもよい），G は M に**推移的に**働くという．

例 1.33 G を群とし，H を G の部分群とする．等質集合 G/H において $x \in G$ の作用を

$$x(aH) = xaH \qquad aH \in G/H$$

と定義すると，G は G/H に推移的に働き，点 $H \in G/H$ における G の等方群は部分群 H である．

定義 G を群とし，R を環とする．G が集合 R に働き，さらにつぎの2つの条件

(1) $x(u+v) = xu + xv$

(2) $x(uv) = (xu)(xv)$

$\qquad x \in G, u, v \in R$

がなりたつとき，G は**環 R に働く**という．このとき

$$R^G = \{u \in R | xu = u \text{（すべての } x \in G \text{ に対して）}\}$$

とおくと，R^G は R の部分環になる．

補題 1.52 群 G が環 R に働き，群 G は正規部分群 N と部分群 H の半直積：$G = NH, N \cap H = e$ であるとする．このとき環 R^N に群 H が働き

$$R^G = (R^N)^H$$

がなりたつ．

証明　$h\in H$, $u\in R^N$ に対して $a(hu)=h((h^{-1}ah)u)=hu$, $a\in N$ となるから $hu\in R^N$ である．よって H は環 R^N に働く．$R^G=(R^N)^H$ は明らかである．

例 1.34　多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ と n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考えよう．$\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ において $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の作用を

$$(\sigma p)(x_1,\cdots,x_n)=p(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$$

と定義すると，$\mathfrak{S}_n$ は環 $\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_n]$ に働く．そして $(\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_n])^{\mathfrak{S}_n}$ の元は**対称多項式**のことである．これについては4章で再び述べることにする．

例 1.35　G を群とし，V を K-加群とする．群 G が集合 V に働き，さらに条件

（1）　$x(u+v)=xu+xv \qquad x\in G,\ u,\ v\in V$

（2）　$x(u\alpha)=(xu)\alpha \qquad \alpha\in K$

をみたすとき，G は **K-加群 V に働く** という．このとき

$$V^G=\{u\in V|xu=u\ (\text{すべての } x\in G \text{ に対して})\}$$

は V の部分 K-加群になる．$\mathfrak{g}$ を K-Lie 環として，上記の条件のほかに

（3）　$x[u,v]=[xu,xv] \qquad x\in G,\ u,\ v\in\mathfrak{g}$

を要求するとき，G は **K-Lie 環 $\mathfrak{g}$ に働く** という．このとき

$$\mathfrak{g}^G=\{u\in\mathfrak{g}|xu=u\ (\text{すべての } x\in G \text{ に対して})\}$$

は $\mathfrak{g}$ の部分 K-Lie 環になる．また S を群とし，群 G が S に働き，条件

$$x(st)=(xs)(xt) \qquad x\in G,\ s,\ t\in S$$

をみたすとき，G は **群 S に働く** という．このとき

$$S^G=\{s\in S|xs=s\ (\text{すべての } x\in G \text{ に対して})\}$$

は S の部分群になる．

§10. 位　相　群

(1) 位相空間

位相空間について述べるのであるが，頁数の都合で詳しいことは省略せざるを得なかった．しかし本書で用いるのは極く初歩的部分（コンパクト，連結，写像の連続など）だけで十分である．それでも一応主な定義と命題だけは列記しておこう．

定義　集合 X において，つぎの3つの条件をみたす X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が与えられているとする．

（1）　空集合 $\in\mathcal{O}$,　$X\in\mathcal{O}$

（2）　$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$　ならば　$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

（3）　$O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in A$　ならば　$\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{O}$

このとき X は（$\mathcal{O}$ を開集合族とする）**位相空間**であるという．$\mathcal{O}$ に属する集合を X の**開集合**という．点 $x \in X$ を含む開集合を x の**近傍**という．X の部分集合 F に対して $X-F$ が開集合であるとき，F を X の**閉集合**という．また X の部分集合 A に対し，A を含む最小の X の閉集合を $\bar{A}$ で表わし，A の**閉包**という．

集合 X の任意の2つの点 x, y に対して実数 $d(x, y)$ が1意に定まり，つぎの4つの条件

（1）　$d(x, y) \geqq 0$

（2）　$d(x, y) = d(y, x)$

（3）　$d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y)$　　　$x, y, z \in X$

（4）　$d(x, y) = 0 \iff x = y$

をみたすとき，X は（**距離** d に関して）**距離空間**であるという．点 $a \in X$ と正数 $\varepsilon > 0$ に対して，X の部分集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

を a の **ε-近傍**という．X の部分集合 O が X の開集合であるとは

O の任意の点 a に対して，O に含まれる a の ε-近傍が存在する：$U_\varepsilon(a) \subset O$

と定義すると，X の開集合全体の集合族 $\mathcal{O}$ により X は位相空間になる．なお距離空間 X の部分集合 Y は，X の距離 d の Y への制限を用いると再び距離空間になるので，Y も位相空間である．

例 1.36　$F = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする．F^n（例1.12）において2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ の距離を

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2} = \sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}$$

と定義すると，F^n は距離空間になる．同様に $M(n, F)$（例1.13）において2つの行列

$A=(a_{ji}),\ B=(b_{ji})$ の距離を

$$d(A,\ B)=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ji}-b_{ji}|^2}$$

と定義すると，$M(n,\ F)$ は距離空間になる．また Clifford K－多元環 $C(K_{-}{}^{n})$ において，基 $1,\cdots,e_i,\cdots,\cdots,e_1\cdots e_n$ が正規直交基となるように $C(K_{-}{}^{n})$ に内積を与え（例1.14）$a,\ b\in C(K_{-}{}^{n})$ の距離を

$$d(a,\ b)=\sqrt{(a-b,\ a-b)}$$

と定義すると，$C(K_{-}{}^{n})$ は距離空間になる．したがって F^n, $M(n,\ F)$, $C(K_{-}{}^{n})$ およびそれらの部分集合（S^{n-1}, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $Spin(n)$ など）は位相空間である．

定義　$X,\ Y$ を位相空間とする．写像 $f\colon X\to Y$ が条件

Y の任意の開集合 O に対して，逆像 $f^{-1}(O)$ は X の開集合である

をみたすとき，f は **連続** であるという．連続写像 $f\colon X\to Y$ が全単射でありかつ f の逆写像 $f^{-1}\colon Y\to X$ も連続であるとき，f を **位相同型写像**（または **同相写像**）という．2つの位相空間 $X,\ Y$ の間に位相同型写像 $f\colon X\to Y$ が存在するとき，X と Y は **位相同型** である（または **同相** である）といい，記号 $X\simeq Y$ で表わす．

定義　X を位相空間とする．X の開被覆

$$X=\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha\qquad O_\alpha\ \text{は}X\text{の開集合}$$

を任意に与えたとき，有限個の $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in A$ をとりだして

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}O_{\alpha_i}$$

にできるとき，X は **コンパクト** であるという．

つぎの2つの補題はいずれも空間がコンパクトであるための条件を与えている．（実は補題1.53, 1.54の逆も正しい）．

補題 1.53　F^n または $M(n,\ F)$ $(F=\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{H})$ の有界[†]閉集合はコンパクトである（[21] 命題58）．

補題 1.54　X を距離空間とする．X の任意の点列 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$ は必ず収束する[††]部分列 $x_{k_1},\ x_{k_2},\ \cdots,\ x_{k_n},\ \cdots$ を含むとき，X はコンパクトである．

---

† 距離空間 X が，ある点 $x_0\in X$ とある $r>0$ が存在して $d(x_0,x)<r,\ x\in X$ となるとき，X は **有界** であるという．

†† 距離空間 X において，点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ と点 $x\in X$ に対して $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ がなりたつとき，点列 $x_1,x_2,\cdots x_n,\cdots$ は x に **収束する** という．

コンパクト空間のもつ性質のうちで，簡単であるが重要なつぎの2つの補題をあげておく．

補題 1.55　コンパクト空間 X 上で定義された連続関数† $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ は最大値および最小値をもつ．

補題 1.56　コンパクト空間 X の閉集合 F はまたコンパクトである([21]補題48(1))．

定義　X を位相空間とする．閉区間 $I=[0, 1]$ から X への連続写像 $c\colon I \to X$ を X の**道**という．X の2点 x, y に対して，X の道 $c\colon I \to X$, $c(0)=x$, $c(1)=y$ が存在するとき，X は**弧状連結**であるという．弧状連結空間 X がさらにつぎの性質をもつとする．X の任意の閉道 $c\colon I \to X$, $c(0)=c(1)=x_0$ に対して

$$h(t, 0)=c(t),\ h(t, 1)=x_0,\ h(0, s)=h(1, s)=x_0$$

をみたす連続写像 $h\colon I \times I \to X$ が存在する．このとき X は**単連結**であるという．

例 1.37　$F^n\,(F=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H})$ において

$$S_F^{n-1}=\{\boldsymbol{a} \in F^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=1\}$$

とおく．$S_{\boldsymbol{R}}^{n-1}$ を単に S^{n-1} とかき，$n-1$ 次元**球面**という．球面 S^{n-1} はコンパクトであり（[21] 定理2)，$n \geqq 2$ ならば S^{n-1} は弧状連結であり（[21] 定理4)，さらに $n \geqq 3$ ならば S^{n-1} は単連結である（[21] 定理55)．また，つぎの位相同型が存在する．

$$S_{\boldsymbol{C}}^{n-1} \simeq S^{2n-1} \qquad S_{\boldsymbol{H}}^{n-1} \simeq S^{4n-1}$$

最後に位相空間の直積を定義しておこう．

定義　X, Y を位相空間とする．直積集合 $X \times Y$ の部分集合 O が $X \times Y$ の開集合であるとは

O が $U \times V$(U, V はそれぞれ X, Y の開集合) の形
の集合の和集合で表わされる：$O=\bigcup_{\alpha \in A}(U_\alpha \times V_\alpha)$

と定義すると，この $X \times Y$ の開集合全体の集合族 $\mathcal{O}$ により $X \times Y$ は位相空間になる．この位相空間 $X \times Y$ を X と Y の**直積空間**という．

補題 1.57　X, Y をコンパクト空間とするとき，$X \times Y$ もコンパクト（空間）になる([21] 命題52)．

---

† 写像 $f\colon X \to Y$ において，$Y=K$ のとき f を特に**関数**という．

(2) 位 相 群

定 義　集合 G が群であると同時に位相空間であり，かつ条件

$$\text{写像 } \mu: G \times G \to G,\ \mu(x, y) = x^{-1}y \text{ は連続である}$$

がなりたつとき，G は**位相群**であるという．

G, G' を位相群とする．群準同型写像 $f: G \to G'$ が連続写像であるとき，f を**連続な群準同型写像**という．群同型写像 $f: G \to G'$ が同時に同相写像であるとき，f を**位相群同型写像**という．2つの位相群 G, G' の間に位相群同型写像 $f: G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**位相群同型**であるといい，記号 $G \cong G'$ で表わす．

例 1.38　$F = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とし

$$GL(n, F) = \{A \in M(n, F) | AB = E \text{ となる } B \in M(n, F) \text{ が存在する}\}$$

とおくと $GL(n, F)$ は（行列の積に関して）位相群をつくる（[21] 定理 5)．この位相群 $GL(n, F)$ を**一般線形群**という．$GL(n, F)$ はコンパクト(群)でない（[21] 定理 23)．$GL(n, F)$ の閉部分群を **Lie 群**†という．

$SL(n, K) = \{A \in M(n, K) | \det A = 1\}$ を**特殊線形群**という．

$O(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) | {}^tAA = E\}$†† を**直交群**という．

$SO(n) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$ を**回転群**または**特殊直交群**という．

$U(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{C}) | A^*A = E\}$†† を**ユニタリ群**という．

$SU(n) = \{A \in U(n) | \det A = 1\}$ を**特殊ユニタリ群**という．

$Sp(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) | A^*A = E\}$†† を**シンプレクティック群**という．

$O(n), SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ はいずれもコンパクト Lie 群である．また $O(n)$ を除くと，$SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ はいずれも弧状連結 Lie 群であり，さらに $SU(n), Sp(n)$ は単連結 Lie 群である．これらの群については 4 章で詳しく述べることにする．群の表現を調べるとき，群にコンパクト(群)という条件をつけることが多い．それはコンパクトでない群の表現論は極めて難かしく，未知のことがあまりにも多過ぎるからである．

Lie 群（$GL(n, F)$ の閉部分群のこと）はつぎに定義する多様体になることが知られている（[3] [11])．

---

† Lie 群にはもっと一般的な定義がある（[21] 173 頁）が，本書ではこのように定義した．$GL(n, F)$ の閉部分群はいわゆる Lie 群になることが知られている．

†† 行列 $A = (a_{ji}) \in M(n, F)$ に対して ${}^tA, A^* \in M(n, F)$ をそれぞれ ${}^tA = (a_{ij}), A^* = (\overline{a_{ij}})$ と定義する．

定義　Mを位相空間とする．Mにつぎの性質をもつ開被覆が存在したとする．

$$M=\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha,\qquad \begin{array}{l}\text{各 } O_\alpha \text{ は } M \text{ の開集合であって，か}\\ \text{つ } \boldsymbol{R}^n \text{ のある開集合と同相である．}\end{array}$$

このときMは**n次元(位相)多様体**であるという．

例 1.39　球面S^nはn次元多様体である（[21] 定理 42)．

(3)　等質空間

定義　Gを位相群，HをGの部分群とし，写像p: $G\to G/H$を$p(x)=xH$と定義する．さて等質集合G/Hの部分集合OがG/Hの開集合であるとは

Oの逆像$p^{-1}(O)$がGの開集合である

と定義すると，G/Hの開集合全体の集合族$\mathcal{O}$によりG/Hは位相空間になる．この位相空間G/HをGのHによる**等質空間**という．

つぎの2つの命題は，位相群Gの位相を知るのに非常に有用である．

命題 1.58　コンパクト群Gが距離空間Xに推移的に働いており，かつその働き方の写像μ: $G\times X\to X$, $\mu(x, a)=xa$が連続であるとする．このときGの1点$a_0\in X$における等方群をG_{a_0}とすると，等質空間G/G_{a_0}はXに位相同型である（[21] 命題 84)：

$$G/G_{a_0}\simeq X$$

命題 1.59　GをLie群とし，HをGの閉部分群とするとき，つぎの(1)(2)(3)がなりたつ．

(1)　HとG/Hがともに弧状連結ならば，Gも弧状連結である（[21] 命題 136)．

(2)　HとG/Hがともに単連結ならば，Gも単連結である（[21] 命題 173)．

(3)　Hがm次元(Lie群)であり，G/Hがn次元多様体であれば，Gは$m+n$次元(Lie群)である．

§11.　不変積分

本節では，Gはつねに位相群を表わすものとする．

(1)　連続関数

Gが位相群であるときには，関数f: $G\to K$が連続であるということをつぎのように定義してもよい．

定義　関数f: $G\to K$が，任意の正数$\varepsilon>0$と任意の点$a\in G$に対してGの単位元

e の近傍 U（この U は ε と a に関係する）が存在し，$x \in G$ が

$$a^{-1}x \in U \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

がなりたつとき，f は **連続** であるという．

G 上で定義された連続関数 $f\colon G \to K$ 全体の集合 $C_K(G)$ において，和と $\alpha \in K$ の作用を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad f, g \in C_K(G)$$

$$(f\alpha)(x) = f(x)\alpha \qquad x \in G, \alpha \in K$$

（$f\alpha$ は αf とかくこともある）と定義すると，$C_K(G)$ は K-加群になる．さらに積を

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

と定義すると，$C_K(G)$ は K-多元環になる．しかし本節ではこの積を用いることはない（2章以下で用いる）．

定義　関数 $f\colon G \to K$ が，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して G の単位元 e の近傍 U（この U は ε に関係する）が存在し，$x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in U \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

がなりたつとき，f は **一様連続** であるという．

関数 $f\colon G \to K$ が一様連続であれば明らかに連続であるが，G がコンパクト群であるときにはこの両者は一致する．すなわち，つぎの補題がなりたつ．

補題 1.60　G をコンパクト群とするとき，連続関数 $f\colon G \to K$ は一様連続である．

証明　f は連続であるから，正数 $\varepsilon > 0$ を与えたとき，各点 $a \in G$ に対して単位元 e の近傍 U_a が存在し，$x \in G$ が

$$a^{-1}x \in U_a \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{(i)}$$

がなりたつ．各 U_a に対して $V_aV_a \subset U_a$ をみたす e の近傍 V_a をとり，G を開集合 aV_a, $a \in G$ で覆う：$G = \bigcup_{a \in G} aV_a$. しかるに G はコンパクトであるから，有限個の点 $a_1, \cdots, a_m \in G$ をとりだして

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} a_i V_{a_i}$$

とすることができる．さて $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}$ とおくと V は e の近傍であって，$x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in V \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon \qquad \text{(ii)}$$

となり f が一様連続であることが示される．実際，$y \in G = \bigcup_{i=1}^{m} a_i V_{a_i}$ であるから，y はある $a_i V_{a_i}$ に含まれている．このとき $y \in a_i V_{a_i}$, $a_i^{-1} y \in V_{a_i} \subset U_{a_i}$ となるので，(i)より

$$|f(y) - f(a_i)| < \varepsilon \tag{iii}$$

がなりたつ．一方 $a_i^{-1}x = (a_i^{-1}y)(y^{-1}x) \in V_{a_i}V \subset V_{a_i}V_{a_i} \subset U_{a_i}$ となるから，再び(i)を用いると

$$|f(x) - f(a_i)| < \varepsilon \tag{iv}$$

となる．(iii) (iv) より

$$|f(x) - f(y)| \leqq |f(x) - f(a_i)| + |f(y) - f(a_i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となり，(ii) が示された．よって f は一様連続である．

(2)　Ascoli-Arzerà の補題

関数列の収束，一様収束を定義し，さらに当面の目的である Ascoli-Arzerà の補題を証明するのであるが，これらは（位相群 G の上で定義されているということはあまり本質的ではなく）解析学で知られているものとほとんど同じである．

定義　(1)　関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$; f: $G \to K$ が，任意の正数 $\varepsilon > 0$ と任意の点 $x \in G$ に対して自然数 N（この N は ε と x に関係する）が存在し

$$n > N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

をみたすとき，$f_1, f_2, \cdots$ は f に**収束する**という．

(2)　関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$; f: $G \to K$ が，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N（この N は ε に関係する）が存在し，すべての $x \in G$ に対して

$$n > N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

をみたすとき，$f_1, f_2, \cdots$ は f に**一様収束する**という．

関数列 $f_1, f_2, \cdots$: $G \to K$ が関数 f: $G \to K$ に一様収束すれば，明らかに $f_1, f_2, \cdots$ は f に収束している．

K が完備距離空間[†]であることに注意すると，つぎの補題を得る．

補題 1.61　関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$: $G \to K$ が（ある関数 f: $G \to K$ に）一様収束するための必要十分条件は，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し，すべての

---

† X を距離空間とする．$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$ をみたす X の任意の点列 $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$ に対して，$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ をみたす点 $x \in X$ が存在するとき，X は**完備**であるという．

$x \in G$ に対して

$$m, n > N \quad ならば \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (\text{i})$$

がなりたつことである.

補題 1.62 連続関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n \cdots : G \to K$ が関数 $f: G \to K$ に一様収束するならば f もまた連続である.

証明 $f_1, f_2, \cdots$ は f に一様収束するから, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し, すべての $x \in G$ に対して

$$n > N \quad ならば \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

がなりたつ. 関数 f_n は連続であるから, この ε と各点 $a \in G$ に対して G の単位元 e の近傍 U が存在し, $x \in G$ が

$$a^{-1}x \in U \quad ならば \quad |f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon \qquad (\text{ii})$$

がなりたつ. さて N より大きい n をとるとき, $a^{-1}x \in U$ ならば (i) (ii) より

$$|f(x) - f(a)| \leqq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

となるから f は連続である.

G をコンパクト群とするとき, 2つの関数 $f, g \in C_K(G)$ の距離を

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{x \in G}|f(x) - g(x)|$$

(補題 1.55) と定義すると $C_K(G)$ は距離空間になる. そして関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$; $f \in C_K(G)$ のこの距離による収束: $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ と, $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ が f に一様収束することとは同じことである. 補題 1.62 は, $C_K(G)$ がこの距離により完備距離空間であることを示している.

定義 $\mathfrak{F}$ を G 上で定義された関数 $f: G \to K$ のある集合とする.

(1) 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して G の単位元 e の近傍 U (この U は ε に関係する) が存在し, すべての $f \in \mathfrak{F}$ に対して, $x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in U \quad ならば \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

がなりたつとき, $\mathfrak{F}$ は**同程度連続**であるという. 明らかに $\mathfrak{F}$ に属する関数 f はすべて (一様)連続である.

(2) 正数 $M > 0$ が存在し, すべての $f \in \mathfrak{F}$ に対して

$$|f(x)| < M \qquad x \in G$$

がなりたつとき，$\mathfrak{F}$ は**一様有界**であるという．

補題 1.63（**Ascoli-Arzerà**）G をコンパクト群とする．G 上で定義された関数 f: $G \to K$ のある集合 $\mathfrak{F}$ が同程度連続かつ一様有界であるならば，$\mathfrak{F}$ に属する任意の関数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ から一様収束する部分列 $g_1, g_2, \cdots$ を選び出すことができる．

証明　$\mathfrak{F}$ は同程度連続であるから，各自然数 p に対して G の単位元 e の近傍 $U^{(p)}$ が存在し，すべての $n\,(n = 1, 2, \cdots)$ に対して，$x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in U^{(p)} \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{p} \tag{i}$$

がなりたつ．G を開集合 $aU^{(p)}$, $a \in G$ で覆う：$G = \bigcup_{a \in G} aU^{(p)}$．しかるに G はコンパクトであるから，有限個の点 $a_1{}^{(p)}, \cdots, a_P{}^{(p)} \in G$ をとりだして

$$G = \bigcup_{i=1}^{P} a_i{}^{(p)} U^{(p)} \tag{ii}$$

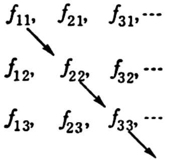
とすることができる．すなわち各自然数 p に対して G の有限個の点 $a_1{}^{(p)}, \cdots, a_P{}^{(p)}$ が対応した．$p = 1, 2, \cdots$ とすると，上記の方法で G の可算個の点 $\{a_1{}^{(p)}, \cdots, a_P{}^{(p)} | p = 1, 2, \cdots\}$ をつくることができる．この集合は可算集合であるから，これらの点に通し番号をつけて $a_1, a_2, \cdots$ としよう．さて $\mathfrak{F}$ は一様有界であるから，集合

$$\{f_n(a_i) | \, n = 1, 2, \cdots, i = 1, 2, \cdots\}$$

は有界である．よって対角線論法により，$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ から部分列 $g_1, g_2, \cdots$ を選びだして，各 i に対し，数列

$$g_1(a_i),\ g_2(a_i),\ \cdots,\ g_n(a_i),\ \cdots \tag{iii}$$

が収束するようにすることができる．この対角線論法について説明しよう．数列 $f_1(a_1)$, $f_2(a_1), \cdots, f_n(a_1), \cdots$ は K における有界集合であるから，この中から収束する部分列



$$f_{11}(a_1),\ f_{21}(a_1),\ \cdots,\ f_{n1}(a_1),\ \cdots$$

をとりだすことができる．つぎに $f_{11}(a_2), f_{21}(a_2), \cdots, f_{n1}(a_2), \cdots$ も K の有界集合であるから，この中からさらに収束する部分列

$$f_{12}(a_2),\ f_{22}(a_2),\ \cdots,\ f_{n2}(a_2),\ \cdots$$

をとりだすことができる．さらに $f_{12}(a_3), f_{22}(a_3), \cdots, f_{n2}(a_3), \cdots$ の中からも収束する部分列

$$f_{13}(a_3),\ f_{23}(a_3),\ \cdots,\ f_{n3}(a_3),\ \cdots$$

をとりだし，以下この操作を続ける．そして $g_n = f_{nn}$ とおくと，$g_1, g_2, \cdots$ は (iii) をみ

たしている．さて，このようにしてつくられた $f_1, f_2, \cdots$ の部分列 $g_1, g_2, \cdots$ が一様収束していることを示そう．与えられた正数 $\varepsilon>0$ に対して，自然数 p を $\dfrac{1}{p}<\varepsilon$ となるようにとる．このとき（i）より，すべての n に対して，$x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in U^{(p)} \quad ならば \quad |g_n(x)-g_n(y)|<\frac{1}{p}<\varepsilon \tag{iv}$$

がなりたっている．つぎに $a_i^{(p)}\ (i=1,\cdots,P)$ に対して，(iii) より $g_1(a_i^{(p)}), g_2(a_i^{(p)}), \cdots, g_n(a_i^{(p)}), \cdots$ は収束しているから，自然数 N_i が存在して

$$m, n>N_i \quad ならば \quad |g_m(a_i^{(p)})-g_n(a_i^{(p)})|<\varepsilon \tag{v}$$

となる．さて $N=\max\limits_{1\leq i\leq P} N_i$ とおくと，すべての $x\in G$ に対して

$$m, n>N \quad ならば \quad |g_m(x)-g_n(x)|<3\varepsilon \tag{vi}$$

がなりたつ．実際，$x\in G$ は（ii）よりある $a_i^{(p)}U^{(p)}$ に含まれるから，(iv) より，すべての n に対して $|g_n(x)-g_n(a_i^{(p)})|<\varepsilon$ となっている．よって $m, n>N$ ならば，(v) とあわせて

$$|g_m(x)-g_n(x)| \leqq |g_m(x)-g_m(a_i^{(p)})|+|g_m(a_i^{(p)})-g_n(a_i^{(p)})|+|g_n(a_i^{(p)})-g_n(x)|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

となり (vi) を得る．すなわち $g_1, g_2, \cdots$ は一様収束している．

この Ascoli-Arzerà の補題はつぎのようにいいかえることもできる．

補題 1.64 (**Ascoli-Arzerà**)　G をコンパクト群とする．G 上で定義された関数 f: $G\to K$ のある集合 $\mathfrak{F}$ が同程度連続かつ一様有界であるならば，$\bar{\mathfrak{F}}$ ($\bar{\mathfrak{F}}$ は距離空間 $C_K(G)$ における $\mathfrak{F}$ の閉包) はコンパクトである．

証明　$\bar{\mathfrak{F}}$ に属する任意の関数列 $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ から一様収束する部分列がとりだせることを示そう．(これが示されると，補題 1.54 より $\bar{\mathfrak{F}}$ はコンパクトであることがわかる)．$h_i\in\bar{\mathfrak{F}}$ であるから，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して

$$\|h_i-f_i\|<\varepsilon \qquad i=1,2,\cdots$$

すなわち，すべての $x\in G$ に対して

$$|h_i(x)-f_i(x)|<\varepsilon \qquad i=1,2.\cdots$$

がなりたつ $f_i\in\mathfrak{F}$ が存在する．さて $\mathfrak{F}$ は同程度連続かつ一様有界であるから，$f_1, f_2, \cdots$ から一様収束する部分列 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots$ をとりだすことができる（補題 1.63)．このとき $h_{n_1}, h_{n_2}, \cdots$ は $h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ の一様収束する部分列である．実際，$\varepsilon>0$ に対して自然数 N が存在し，すべての $x\in G$ に対して

$$m, k > N \quad ならば \quad |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon$$

となっているので，$h_{n_1}, h_{n_2}, \cdots$に対しても，$m, k > N$ならばすべての$x \in G$に対して

$$|h_{n_m}(x) - h_{n_k}(x)| \leqq |h_{n_m}(x) - f_{n_m}(x)| + |f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - h_{n_k}(x)|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

となるからである．以上で補題が示された．

(3) 不変積分

まず2つの記号f^a, f_a, $a \in G$を約束しよう．関数f: $G \to K$に対して，関数f^a, f_a: $G \to K$をそれぞれ

$$f^a(x) = f(ax),\ f_a(x) = f(xa) \qquad x \in G$$

で定義する．fが連続関数ならばf^a, f_aも連続関数である．

補題 1.65 Gをコンパクト群とし，f: $G \to \boldsymbol{R}$を連続関数とする．このとき，つぎの(1) (2)がなりたつ．

（1） fに対し，つぎの性質をもつ実数αを対応させることができる：任意の正数$\varepsilon > 0$に対して$a_1, \cdots, a_n \in G$, $c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$ ($c_1 \geqq 0, \cdots, c_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$)（このn; $a_1, \cdots, a_n$; $c_1, \cdots, c_n$はεに関係する）が存在し，すべての$x \in G$に対して

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i x) - \alpha\right| < \varepsilon^{\dagger}$$

がなりたつ．（このαを仮りにfの**左平均値**ということにする）．

（2） fに対し，つぎの性質をもつ実数βを対応させることができる：任意の正数$\varepsilon > 0$に対して$b_1, \cdots, b_m \in G$, $d_1, \cdots, d_m \in \boldsymbol{R}$ ($d_1 \geqq 0, \cdots, d_m \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{m} d_j = 1$)（このm; $b_1, \cdots, b_m$; $d_1, \cdots, d_m$はεに関係する）が存在し，すべての$x \in G$に対して

$$\left|\sum_{j=1}^{m} d_j f(x b_j) - \beta\right| < \varepsilon^{\dagger}$$

がなりたつ．（このβを仮りにfの**右平均値**ということにする）．

証明 (1)と(2)の証明は同じであるから(1)を証明しよう．

$C_K(G)$において

$$\mathfrak{F}(f) = \left\{ g \,\middle|\, g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^{a_i}, \quad \begin{array}{l} a_1, \cdots, a_n \in G \\ c_1 \geqq 0, \cdots, c_n \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} c_i = 1 \end{array} \quad n = 1, 2, \cdots \right\}$$

---

† これらの式はそれぞれ$\|\sum_{i=1}^{n} c_i f^{a_i} - \alpha\| < \varepsilon$, $\|\sum_{j=1}^{m} d_j f_{b_j} - \beta\| < \varepsilon$のことである．

とおくとき，$\mathfrak{F}(f)$ の閉包 $\overline{\mathfrak{F}(f)}$ の中に定数関数 α が存在することを示すと補題の証明が完成する．（$\overline{\mathfrak{F}(f)}$ の元のうちで長さが最小の元 α が求めるものになっている）．まず $\mathfrak{F}(f)$ が同程度連続であることを示そう．G はコンパクト群であるから，連続関数 f は一様連続である（補題1.60）．すなわち任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して G の単位元 e の近傍 U が存在し，$x, y \in G$ が

$$y^{-1}x \in U \quad ならば \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

がなりたつ．このとき $(a_iy)^{-1}(a_ix)=y^{-1}x \in U$ であるので

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_ix) - \sum_{i=1}^{n} c_i f(a_iy)| \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i |f(a_ix)-f(a_iy)| < (\sum_{i=1}^{n} c_i)\varepsilon = \varepsilon$$

となり $\mathfrak{F}(f)$ は同程度連続である．つぎに $\mathfrak{F}(f)$ が一様有界であることを示そう．f はコンパクト群 G 上で定義された連続関数であるから有界である（補題1.55）．すなわち正数 $M>0$ が存在して

$$|f(x)|<M \qquad x \in G$$

がなりたつ．このとき

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_ix)| \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i |f(a_ix)| < (\sum_{i=1}^{n} c_i)M = M$$

となるから，$\mathfrak{F}(f)$ は一様有界である．$\mathfrak{F}(f)$ は同程度連続かつ一様有界であることがわかったから，$\overline{\mathfrak{F}(f)}$ はコンパクトである（補題1.64）．さて写像 $\varphi: C_R(G) \to \boldsymbol{R}$, $\varphi(g)=\|g\|=\max_{x\in G}|g(x)|$ は連続であるから，φ はコンパクト集合 $\overline{\mathfrak{F}(f)}$ の上で最小値をもつ（補題1.55）．よって $\|h\|$, $h \in \overline{\mathfrak{F}(f)}$ が最小となる元 $\alpha \in \overline{\mathfrak{F}(f)}$ が存在する．すなわち

$$\|\alpha\| \leqq \|h\| \qquad h \in \overline{\mathfrak{F}(f)} \tag{i}$$

がなりたつ．この α が定数関数になるのである．実際，α が定数でないとして

$$\min_{x\in G}\alpha(x)=l, \qquad \max_{x\in G}\alpha(x)=L$$

（補題1.55）とおくと $l<L$ である．よって

$$U=\{x \in G \mid \alpha(x)<\frac{l+L}{2}\}$$

とおくと U は空でない G の開集合である．この U を用いて G の開被覆 $G=\bigcup_{a\in G}a^{-1}U$ をつくると，G はコンパクトであることから，有限個の点 $a_1, \cdots, a_k \in G$ をとりだして

$$G=\bigcup_{i=1}^{k} a_i^{-1}U \tag{ii}$$

とすることができる．同様に

$$U' = \{x \in G \mid \alpha(x) > \frac{l+L}{2}\}$$

とおくと U' も空でない G の開集合であるから，G の有限開被覆

$$G = \bigcup_{j=1}^{k'} a'_j{}^{-1} U' \tag{iii}$$

をつくることができる．関数 $h: G \to \boldsymbol{R}$

$$h(x) = \frac{1}{k+k'}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha(a_i x) + \sum_{j=1}^{k'} \alpha(a_j' x)\right)$$

をつくると，容易にわかるように $h \in \overline{\mathfrak{F}(f)}$ である．$x \in G$ は (ii) よりある $a_i^{-1}U$ に属するので，$a_i x \in U$，すなわち $\alpha(a_i x) < \dfrac{l+L}{2}$ である．このとき $h(x) < \dfrac{1}{k+k'}\left(\left(\dfrac{l+L}{2} + (k-1)L\right) + k'L\right) < L$ となる．よって $\max_{x \in G} h(x) < L = \max_{x \in G} \alpha(x)$ である．同様に $\min_{x \in G} h(x) > \min_{x \in G} \alpha(x)$ にもなるので，両者をあわせると

$$||h|| < ||\alpha||$$

を得る．これは $||\alpha||$ が最小であるという仮定（i）に反する．よって α は定数である．以上で補題が証明された．

補題 1.66　G をコンパクト群とするとき，連続関数 $f: G \to \boldsymbol{R}$ の左平均値 α と右平均値 β は一致する：$\alpha = \beta$．よって f の左平均値は f に対し１意に定まる．（したがって f の左平均値を単に f の **平均値** といい，$I(f)$ で表わすことにする）．

証明　任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $a_1, \cdots, a_n$; $b_1, \cdots, b_m \in G$, $c_1 \geqq 0, \cdots, c_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$; $d_1 \geqq 0, \cdots, d_m \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{m} d_j = 1$ が存在して，すべての $x \in G$ に対して

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i x) - \alpha\right| < \varepsilon \tag{i}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{m} d_j f(x b_j) - \beta\right| < \varepsilon \tag{ii}$$

がなりたつ．(i) において x の代りに xb_j とおき，d_j を掛けて加えると

$$\left|\sum_{i,j} c_i d_j f(a_i x b_j) - \alpha\right| \leqq \sum_{j=1}^{m} d_j \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i x b_j) - \alpha\right| < \left(\sum_{i=1}^{m} d_j\right)\varepsilon = \varepsilon \tag{iii}$$

となる．同様に，(ii) において x の代りに $a_i x$ とおき，c_i を掛けて加えると

$$\left|\sum_{i,j} c_i d_j f(a_i x b_j) - \beta\right| < \varepsilon \tag{iv}$$

となる．(iii) (iv) より

$$|\alpha-\beta|<2\varepsilon$$

を得る．しかるに ε は任意の正数であるから，これより $\alpha=\beta$ を得る．

補題 1.67 G をコンパクト群とし，$f\colon G\to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．このとき任意の $a_1,\cdots,a_n\in G,\ c_1\geqq 0,\cdots,c_n\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i=1$ に対して，$\sum_{i=1}^{n}c_if^{a_i}$ の平均値は f の平均値に等しい：

$$I(\sum_{i=1}^{n}c_if^{a_i})=I(f)$$

証明 f の平均値 $I(f)=\alpha$ を f の右平均値とみなすとき，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して $b_1,\cdots,b_m\in G,\ d_1\geqq 0,\cdots,d_m\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{m}d_j=1$ が存在し，すべての $x\in G$ に対して

$$|\sum_{j=1}^{m}d_jf(xb_j)-\alpha|<\varepsilon$$

がなりたつ．x の代りに a_ix とおき，c_i を掛けて加えると

$$|\sum_{i,j}c_id_jf(a_ixb_j)-\alpha|<\varepsilon$$

すなわち

$$|\sum_{j=1}^{m}d_j(\sum_{i=1}^{n}c_if^{a_i}(xb_j))-\alpha|<\varepsilon$$

がなりたつ．これは $\sum_{i=1}^{n}c_if^{a_i}$ の(右)平均値が α であることを示している．

以上の準備のもとに，コンパクト群 G 上の関数を積分することを考えよう．

命題 1.68 G をコンパクト群とする．G 上で定義された各連続関数 $f\colon G\to K$ に対して，つぎの性質をもつ K の元 $\int f(x)dx$ を対応させることができる．

（1） $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad f,g\in C_K(G)$

（2） $\int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx \qquad \alpha\in K$

（3） $f\geqq 0$（すべての $x\in G$ に対して $f(x)\geqq 0$ のこと）ならば $\int f(x)dx\geqq 0$

（4） $f=1$（すべての $x\in G$ に対して $f(x)=1$ のこと）ならば $\int f(x)dx=1$

（5） $\int f(ax)dx=\int f(x)dx \qquad a\in G$

この (1) ～ (5) をみたすもの[†]は1意に定まる．K の元 $\int f(x)dx$ を f の**不変積分**と

[†] 写像 $I\colon C_K(G)\to K,\ I(f)=\int f(x)dx$ は，性質 (1) (2) より K-準同型写像である．したがって I は $\mathrm{Hom}_K(C_K(G),K)$ の元である．

いう．さらに不変積分はつぎの性質をもっている．

（6）　$f \geqq 0$, $f \neq 0$（ある $x_0 \in G$ に対して $f(x_0) \neq 0$ のこと）ならば $\int f(x)dx > 0$

（7）　$\int f(xa)dx = \int f(x)dx \qquad a \in G$

（8）　$\int f(x^{-1})dx = \int f(x)dx$

（9）　$|\int f(x)dx| \leqq \int |f(x)|dx$

証明　まず $K = \boldsymbol{R}$ のときに証明しよう．f の平均値 $I(f)$ を $\int f(x)dx$ とかくとよいのである．

（1）　$I(f)$ を f の左平均値とみなすと，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して $a_1, \cdots, a_n \in G$, $c_1 \geqq 0, \cdots, c_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ が存在し，すべての $x \in G$ に対して

$$|\sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i x) - I(f)| < \varepsilon \qquad \text{(i)}$$

がなりたつ．$I(g)$ を g の右平均値とみなすと，$b_1, \cdots, b_m \in G$, $d_1 \geqq 0, \cdots, d_m \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{m} d_j = 1$ が存在し，すべての $x \in G$ に対して

$$|\sum_{j=1}^{m} d_j g(xb_j) - I(g)| < \varepsilon \qquad \text{(ii)}$$

がなりたつ．（i）において x の代りに xb_j とおき，d_j を掛けて加え，(ii) において x の代りに $a_i x$ とおき，c_i を掛けて加えると，それぞれ

$$|\sum_{i,j} c_i d_j f(a_i x b_j) - I(f)| < \varepsilon, \quad |\sum_{i,j} c_i d_j g(a_i x b_j) - I(g)| < \varepsilon$$

となる．さらに，これら２つの不等式より

$$|\sum_{i,j} c_i d_j (f+g)(a_i x b_j) - (I(f) + I(g))| < 2\varepsilon$$

すなわち

$$|\sum_{j=1}^{m} d_j (\sum_{i=1}^{n} c_i (f+g)^{a_i}(xb_j)) - (I(f) + I(g))| < 2\varepsilon$$

を得るが，これは $\sum_{i=1}^{n} c_i (f+g)^{a_i}$ の(右)平均値が $I(f) + I(g)$ であることを示している．しかるに $\sum_{i=1}^{n} c_i (f+g)^{a_i}$ の平均値は $f+g$ の平均値 $I(f+g)$ に等しい（補題1.67）から，$I(f+g) = I(f) + I(g)$ を得る．

(2) (3) (4) は，平均値を定義する不等式（i）より明らかであろう．(5) は $I(f^a) =$

$I(f)$（補題1.67）である．

（1）～（5）をみたす不変積分が一意に定まることを示そう．$J: C_R(G) \to R$ も（1）～（5）の性質をもつとする．（i）をかきかえると

$$-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} c_i f^{a_i} - I(f) < \varepsilon$$

である．これに J を施して（1）～（5）を用いると

$$-\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i J(f) - I(f) \leqq \varepsilon$$

すなわち

$$-\varepsilon \leqq J(f) - I(f) \leqq \varepsilon$$

を得る．しかるに ε は任意の正数であるから，これより $J(f) = I(f)$ を得る．

（6）　$f \geqq 0, f \neq 0$ であるから，ある $x_0 \in G$ に対して $f(x_0) = 2s > 0$ となる．$U = \{x \in G \mid f(x) > s\}$ とおくと U は空でない G の開集合であるから，G の開被覆 $G = \bigcup_{a \in G} a^{-1}U$ をつくる．G はコンパクトであるから，有限個の点 $a_1, \cdots, a_n \in G$ をとりだして，$G = \bigcup_{i=1}^{n} a_i^{-1}U$ とすることができる．このとき

$$\sum_{i=1}^{n} f^{a_i} > s \tag{iii}$$

がなりたつ．実際，$x \in G$ はある $a_i^{-1}U$ に含まれるので，$a_i x \in U$，よって $f(a_i x) > s$ となる．これと $f \geqq 0$ とあわせると $\sum_{i=1}^{n} f(a_i x) > s$ を得るが，これは（iii）を示している．さて（iii）に I を施すと $nI(f) \geqq s$, $I(f) \geqq \dfrac{s}{n} > 0$ を得る．

（7）　$I(f)$ を f の右平均値とみなすとよい．

（8）　平均値の式（i）において，x の代りに x^{-1} とおくとよい．

（9）　f に対して関数 $|f|: G \to R$ を $|f|(x) = |f(x)|$ と定義すると，$|f|$ は連続関数であって

$$-|f| \leqq f \leqq |f|$$

をみたしている．これに I を施すと

$$-I(|f|) \leqq I(f) \leqq I(|f|)$$

を得る．すなわち $|I(f)| \leqq I(|f|)$ がなりたつ．

つぎに $K = C$ のときを考えよう．連続関数 $f: G \to C$ は2つの連続関数 $g, h: G \to R$ を用いて

$$f = g + ih$$

と1通りに表わされるので，$I(f) = \int f(x)dx$ を

$$I(f) = I(g) + iI(h)$$

と定義する（また (1) (2) の性質をみたすためにはこのように定義しなければならないので，不変積分の1意性がわかる）と (1) ～ (9) をみたしている．実際，(2) (9) を除いては自明であるから，(2) (9) のみ示そう．

(2) $\alpha = c + id,\ c, d \in \boldsymbol{R};\ f = g + ih,\ g, h \in C_{\boldsymbol{R}}(G)$ とおくとき

$$\begin{aligned} I(\alpha f) &= I((c+id)(g+ih)) = I((cg-dh)+i(dg+ch)) \\ &= I(cg-dh) + iI(dg+ch) = (cI(g)-dI(h)) + i(dI(g)+cI(h)) \\ &= (c+id)(I(g)+iI(f)) = \alpha I(f) \end{aligned}$$

となる．

(9) $f = g + ih,\ g, h \in C_{\boldsymbol{R}}(G)$ と表わしておく．関数 $g_1, h_1 : G \to \boldsymbol{R}$ を

$$g_1(x) = \begin{cases} (g(x))^2/|f(x)| \\ 0 \end{cases},\quad h_1(x) = \begin{cases} (h(x))^2/|f(x)| & f(x) \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & f(x) = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると g_1, h_1 は連続関数であって

$$|g| = \sqrt{g_1|f|},\quad |h| = \sqrt{h_1|f|}$$

$$g_1 + h_1 = |f|$$

をみたしている．さて

$$(I(g))^2 \leqq (I(|g|))^2 = (I(\sqrt{g_1}\sqrt{|f|}))^2 \leqq I(g_1)I(|f|)^{\dagger}$$

がなりたつ．同様に

$$(I(h))^2 \leqq I(h_1)I(|f|)$$

もなりたつ．よって

$$\begin{aligned} |I(f)|^2 &= |I(g) + iI(h)|^2 = (I(g))^2 + (I(h))^2 \leqq I(g_1)I(|f|) + I(h_1)I(|f|) \\ &= I(g_1 + h_1)I(|f|) = I(|f|)I(|f|) = (I|f|))^2 \end{aligned}$$

より $|I(f)| \leqq I(|f|)$ を得る．

---

† K-加群 $C_K(G)$ において，内積を $(f, g) = \int \overline{f(x)} g(x)dx$ と定義すると $C_K(G)$ は内積をもつ K-加群になる．よって **Cauchy-Schwarz の不等式** とよばれるつぎの不等式がなりたつ（[21] 補題13）．

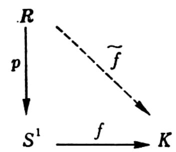
$$\left|\int \overline{f(x)} g(x)dx\right|^2 \leqq \left(\int |f(x)|^2 dx\right)\left(\int |g(x)|^2 dx\right)$$

例 1.40　$G=\{x_1, \cdots, x_n\}$ を有限群とする. G に離散位相 (G の部分集合はすべて開集合であるとした位相) をいれると G はコンパクト群になる. 関数 $f\colon G\to K$ (f は連続関数になる) に対して

$$\int f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

と定義すると $\int f(x)dx$ が f の不変積分になる.

例 1.41　1次元球面 $S^1=\{x\in \boldsymbol{C}\mid |x|=1\}$ は(積に関して)コンパクト群である. $f\colon S^1\to K$ を連続関数とする. f に対して $\tilde{f}\colon \boldsymbol{R}\to K$ を



$$\tilde{f}(t)=f(e^{2\pi it})$$

と定義すると $\tilde{f}$ は周期1をもつ連続関数になる: $\tilde{f}(t+1)=\tilde{f}(t)$. さて

$$\int f(x)dx=\int_0^1 \tilde{f}(t)dt$$

と定義すると $\int f(x)dx$ が f の不変積分になる.

(4)　Fubini の定理

積分順序交換可能定理を証明しよう.

補題 1.69　G_1, G_2 をコンパクト群とする. 連続関数 $f\colon G_1\times G_2\to K$ に対して関数 $g\colon G_2\to K$ を

$$g(y)=\int f(x, y)dx$$

と定義すると g は連続である. 同様に関数 $h\colon G_1\to K$, $h(x)=\int f(x, y)dy$ も連続である.

証明　$G_1\times G_2$ はコンパクト (補題1.57) 群であるから, 連続関数 f は一様連続である (補題1.60). したがって任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して, G_1, G_2 の単位元 e_1, e_2 のそれぞれの近傍 U_1, U_2 が存在して, $x, x'\in G_1$, $y, y'\in G_2$ が

$$x'^{-1}x\in U_1,\ y'^{-1}y\in U_2 \quad \text{ならば} \quad |f(x, y)-f(x', y')|<\varepsilon$$

がなりたつ. 特に $x=x'$ として

$$y'^{-1}y\in U_2 \quad \text{ならば} \quad |f(x, y)-f(x, y')|<\varepsilon$$

がなりたつ. さて $y'^{-1}y\in U_2$ ならば

$$|g(y)-g(y')| = |\int (f(x,y)-f(x,y'))dx|$$

$$\leqq \int |f(x,y)-f(x,y')|dx\ (\text{命題}\,1.68\,(9)) < \int \varepsilon dx = \varepsilon$$

となるから，g は(一様)連続である．

命題 1.70 (**Fubini**)　G_1, G_2 をコンパクト群とするとき，連続関数 $f: G_1\times G_2 \to K$ に対して

$$\int\Bigl(\int f(x,y)dx\Bigr)dy = \int\Bigl(\int f(x,y)dy\Bigr)dx$$

がなりたつ．(この値を $\iint f(x,y)dxdy$ とかくことにする)．

証明　2つの写像 $I, J: C_K(G_1\times G_2)\to K$ をそれぞれ

$$I(f) = \int\Bigl(\int f(x,y)dx\Bigr)dy,\quad J(f) = \int\Bigl(\int f(x,y)dy\Bigr)dx$$

と定義する．これらが定義できることを補題1.69が保証している．この I, J が命題1.68の条件 (1) ～ (5) をみたしていることが容易にわかる．よって不変積分の1意性 (命題1.68) より $I=J$, $I(f)=J(f)$ を得る．

2 群の表現

G で位相群を表わし，K で体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のいずれか1つを表わすのは1章と同じである．

本章において，群の表現の一般論について述べよう．群の表現を定義するとき，それを G-K-加群とするのと群準同型写像 $A: G \to GL(n, K)$ とするのと2つの方法があるが，本書では両方の関係をできるだけ詳しく述べておくことにした．なお表現に関する命題のなかには複素数体 $\boldsymbol{C}$ でなりたつが，実数体 $\boldsymbol{R}$ ではなりたたないものがいくつかあることに注意しよう．

§1. G-K-加 群

(1) G-K-加群と表現

定 義　有限次元 K-加群 V の任意の元 u と位相群 G の任意の元 x に対して V の元 xu が1意に定まり，つぎの2つの条件

（1）　$x(u+v) = xu + xv$

$x(u\alpha) = (xu)\alpha \qquad x, y \in G,\ u, v \in V,\ \alpha \in K$

$x(yu) = (xy)u$

$eu = u \qquad e$ は G の単位元

（2）　V のある基 $u_1, \cdots, u_n$ に対して

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n$$

と表わすとき，元 $x \in G$ に $a_{ji}(x) \in K$ を対応させる関数

$$a_{ji}: G \to K \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

が連続である．

がなりたつとき，V を **G-K-加群**（または G の体 K の上の**表現加群**）という．

G-K-加群 V の定義における (2) の条件は，V の基のとり方によらないことを証明しなければならない．$v_1, \cdots, v_n$ を V のもう1つの基とし

$$xv_i = \sum_{j=1}^{n} v_j b_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとする．基の間の関係が

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} v_k q_{ki}, \qquad v_i = \sum_{k=1}^{n} u_k p_{ki} \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとするとき

$$\sum_j v_j b_{ji}(x) = xv_i = x(\sum_k u_k p_{ki}) = \sum_k (xu_k) p_{ki} = \sum_{l,k} u_l a_{lk}(x) p_{ki}$$
$$= \sum_{j,l,k} v_j q_{jl} a_{lk}(x) p_{ki}$$

より

$$b_{ji}(x) = \sum_{l,k} q_{jl} a_{lk}(x) p_{ki}$$

となる．よって各 a_{lk} が連続であるならば b_{ji} も連続である．

例 2.1　K-加群 K^n において $A = \begin{pmatrix} a_{ik} \end{pmatrix} \in GL(n, K)$ の作用を

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_k, \quad i = 1, \cdots, n$$

と定義すると，K^n は $GL(n, K)$-K-加群になる．さらに $GL(n, K)$ の(位相)部分群 G に対しても，K^n は（上記の作用により）G-K-加群になる．特に $\boldsymbol{R}^n$ は $O(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群であり，さらに $SO(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群であり，$\boldsymbol{C}^n$ は $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群，また $SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．

例 2.2　零元 0 のみからなる 0 次元 K-加群 0 は，任意の G に対して G-K-加群である．

定 義　V を G-K-加群とする．V の部分 K-加群 W が

$$x \in G, \ w \in W \quad ならば \quad xw \in W$$

をみたすとき，W を V の **部分 G-K-加群** という．

V を G-K-加群とし，W を V の部分 G-K-加群とする．剰余 K-加群 V/W において $x \in G$ の作用を

$$x[u] = [xu] \qquad u \in V$$

と定義すると，V/W は G-K-加群になる．この G-K-加群 V/W を V の W による **剰余 G-K-加群** という．念のために V/W が G-K-加群の定義の (2) の条件をみたしていることを確かめておこう．V/W に基 $[u_1], \cdots, [u_m]$ をとる．このとき $u_1, \cdots,$

$u_m \in V$は1次独立になるから，これにVの元$u_{m+1}, \cdots, u_n$をつけ加えて$u_1, \cdots, u_n$をVの基にすることができる.

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n, \ x \in G$$

（各 a_{ji}: $G \to K$ は連続であった）とするとき

$$x[u_i] = [xu_i] = \left[\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} [u_j] a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, m$$

となり，$[u_j]$ の係数に連続関数 a_{ji} が現われる．よって V/Wは（2）の条件をみたしている.

定義　V, WをG-K-加群とする．K-準同型写像 f: $V \to W$ が

$$f(xu) = x(f(u)) \qquad x \in G, \ u \in V$$

をみたすとき，fを **G-K-準同型写像** という．G-K-準同型写像 f: $V \to W$ が全単射であるとき，fを **G-K-同型写像** という．2つのG-K-加群V, Wの間にG-K-同型写像 f: $V \to W$ が存在するとき，VとWは **G-K-同型** であるといい，記号 $V \cong W$ で表わす.

例 2.3　Vを有限次元K-加群とする．Vにおいて $x \in G$ の作用を

$$xu = u \qquad u \in V$$

と定義すると，VはG-K-加群になる．このG-K-加群Vを **自明G-K-加群** という．n次元自明G-K-加群はすべて互いにG-K-同型である．Kを自明G-K-加群とみるとき，それも同じ記号Kで表わすことにする.

定義*　連続な群準同型写像 A: $G \to GL(n, K)$ を G の（**次数 n の K-）表現** という．（写像 A: $G \to GL(n, K)$ が連続であるとは，$A(x) = \left(a_{ji}(x)\right)$ と表わすとき各関数 a_{ji}: $G \to K$ が連続であること，と理解してよい）.

例 2.4　包含写像 A: $SO(n) \to GL(n, \boldsymbol{R})$ は $SO(n)$ の $\boldsymbol{R}$-表現である．同様に包含写像 A: $U(n) \to GL(n, \boldsymbol{C})$ は $U(n)$ の $\boldsymbol{C}$-表現である.

Gの表現 A: $G \to GL(n, K)$ と行列 $P \in GL(n, K)$ に対して，B: $G \to GL(n, K)$, $B(x) = P^{-1}A(x)P$ もまたGの表現になる．逆につぎの定義を与える.

定義*　A, B: $G \to GL(n, K)$ を G の表現とする．A と Bの間に

$$B(x) = P^{-1}A(x)P \qquad x \in G$$

をみたす行列 $P \in GL(n, K)$ が存在するとき，A と Bは **同値** であるといい，記号 A

$\cong B$ で表わす.

位相群 G に対し，G-K-加群を考察することと G の K-表現を考察することとは同じことなのである．このことを示そう．以下しばらく G-K-加群は0次元でないとしておく.

G-K-加群 V から G の K-表現 A のつくり方はつぎのようである.

（1） V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，$x \in G$ に対して

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i=1, \cdots, n$$

であるとする．このとき写像 $A: G \to GL(n, K)$ を

$$A(x) = j\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & a_{ji}(x) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

と定義すると，A は G の表現になる．実際,

$$\sum_j u_j a_{ji}(xy) = (xy)u_i = x(yu_i) = x(\sum_k u_k a_{ki}(y)) = \sum_k (xu_k)a_{ki}(y)$$
$$= \sum_{j,k} u_j a_{jk}(x) a_{ki}(y)$$

より

$$a_{ji}(xy) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) a_{ki}(y) \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

すなわち

$$A(xy) = A(x)A(y) \tag{i}$$

がなりたつ．また G の単位元 e に対しては $eu_i = u_i,\ i=1, \cdots, n$ であるから

$$A(e) = E \qquad E \text{ は } n \text{ 次の単位行列} \tag{ii}$$

がなりたつ．(i)(ii) より $A(x) \in GL(n, K)$ がわかり，かつ (i) は写像 $A: G \to GL(n, K)$ が G の表現であることを示している．このようにして V からつくられた表現 A を **V の基 $u_1, \cdots, u_n$ に関する G の表現**ということにする.

（2） V にもう1つの基 $v_1, \cdots, v_n$ をとり，この基に関する G の表現を B とすると，B は (1) でつくった表現 A と同値になる：$A \cong B$．実際，基の間の関係が

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} v_k q_{ki}, \qquad v_i = \sum_{k=1}^{n} u_k p_{ki} \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとして行列 $P = \left(p_{ki}\right)$，$Q = \left(q_{ki}\right) \in M(n, K)$ をつくると，$PQ = E$，$Q^{-1} = P$

となる．このとき $A(x)=\left(a_{ji}(x)\right)$, $B(x)=\left(b_{ji}(x)\right)$ の成分の間には

$$b_{ji}(x)=\sum_{l,k} q_{jl}a_{lk}(x)p_{ki}$$

の関係がある（計算は78頁）ので

$$B(x)=P^{-1}A(x)P \qquad x\in G$$

となる．よって $B\cong A$ である．

（3） 2つの G-K-加群 V, W が G-K-同型：$V\cong W$ であるならば，（それらのある基を用いて）V, W からつくられる G の表現をそれぞれ A, B とするとき，A と B は同値になる：$A\cong B$. 実際，$f\colon V\to W$ を G-K-同型写像とする．V に基 $u_1,\cdots,u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とする．つぎに W の基として $w_1=f(u_1),\cdots,w_n=f(u_n)$ をとり，この基に関する G の表現をつくると，それは A と全く同じである．なぜなら $A=\left(a_{ji}\right)$ とするとき

$$xw_i=x(f(u_i))=f(xu_i)=f(\sum_{j=1}^{n}u_ja_{ji}(x))=\sum_{j=1}^{n}f(u_j)a_{ji}(x)=\sum_{j=1}^{n}w_ja_{ji}(x)$$

となるからである．基のとりかえは (2) により同値であるから (3) の結果を得る．

逆に G の表現 $A\colon G\to GL(n,K)$, $A=\left(a_{ji}\right)$ から G-K-加群 V をつくる方法を述べよう．

（1′） V を n 次元 K-加群とし，V に基 $u_1,\cdots,u_n$ をとる．$x\in G$ に対して K-準同型写像 $x\colon V\to V$ を

$$xu_i=\sum_{j=1}^{n}u_ja_{ji}(x) \qquad i=1,\cdots,n$$

をみたすように定義すると，V は $x\in G$ のこの作用により G-K-加群になる．（証明は (1) の計算を逆にたどるとよい）．このようにしてつくられた G-K-加群 V を V_u と表わそう．

（2′） K-加群 V にもう1つの基 $v_1,\cdots,v_n$ をとり，（1′）と同様にして G-K-加群 V_v をつくると，V_u と V_v は G-K-同型になる．実際，$f(u_i)=v_i$, $i=1,\cdots,n$ をみたす K-準同型写像 $f\colon V\to V$ は明らかに V_u と V_v の G-K-加群の同型を与えている．

（3′） $A=\left(a_{ji}\right)$, $B=\left(b_{ji}\right)\colon G\to GL(n,K)$ を G の同値な2つの表現とする．すなわち，ある $P=\left(p_{ji}\right)\in GL(n,K)$ が存在して

$$B(x)=P^{-1}A(x)P \qquad x\in G$$

となっているとする．V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり

$$v_i=\sum_{k=1}^{n} u_k p_{ki} \qquad i=1, \cdots, n$$

とおくと $v_1, \cdots, v_n$ も V の基となる．これらの基を用いて

$$xu_i=\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i=1, \cdots, n$$

$$xv_i=\sum_{j=1}^{n} v_j b_{ji}(x) \qquad i=1, \cdots, n$$

により $x\in G$ の作用を定義して2つの G-K-加群 V_u, V_v をつくると，V_u と V_v は G-K-加群として一致している．実際，$u\in V$ が

$$u=\sum_i u_i\alpha_i=\sum_{k,i} v_k q_{ki}\alpha_i \qquad \left(q_{ki}\right)=P^{-1}$$

であるとするとき，V_u における xu の定義は

$$xu=x(\sum_i u_i\alpha_i)=\sum_i (xu_i)\alpha_i=\sum_{j,i} u_j a_{ji}(x)\alpha_i$$

である．一方，V_v における xu の定義は，

$$xu=x(\sum_{k,i} v_k q_{ki}\alpha_i)=\sum_{k,i} (xv_k)q_{ki}\alpha_i=\sum_{l,k,i} v_l b_{lk}(x)q_{ki}\alpha_i=\sum_{l,j,m,k,i} v_l q_{lj}a_{jm}(x)p_{mk}q_{ki}\alpha_i$$

$$=\sum_{l,j,m,i} v_l q_{lj}a_{jm}(x)\delta_{mi}\alpha_i=\sum_{j,i} u_j a_{ji}(x)\alpha_i$$

となり前者と一致している．

以上のことをつぎの命題にまとめておこう．

命題 2.1 0と異なる G-K-加群の G-K-同型類全体の集合と，G の K-表現の同値類全体の集合の間には（上に述べた対応での）全単射が存在する．

（2） 直和表現

定義 V, W を G-K-加群とする．V と W の K-加群としての直和 $V\oplus W$ において $x\in G$ の作用を

$$x(u, w)=(xu, xw) \qquad u\in V,\ w\in W$$

と定義すると，$V\oplus W$ は G-K-加群になる．この G-K-加群 $V\oplus W$ を V と W の**直和 G-K-加群**[†]という．

[†] 明らかに $V\cong V'$，$W\cong W'$ ならば $V\oplus W\cong V'\oplus W'$ がなりたつ．このような事実は，テンソル積，外積，双対 G-K-加群等を定義するときにまず証明しなければならないことであるが，すべて省略することにした．

定義* $A: G \to GL(n, K)$, $B: G \to GL(m, K)$ を G の表現とする．写像 $C: G \to GL(n+m, K)$ を

$$C(x) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{pmatrix}$$

と定義すると，C は G の表現になる．この表現 C を $A \oplus B$ で表わし，A と B の**直和表現**という．

補題2.2 V, W を G - K - 加群とする．V, W に基 $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_m$ をとり，それらの基に関する G の表現をそれぞれ A, B とする．このとき G - K - 加群 $V \oplus W$ の基

$$(u_1, 0), \cdots, (u_n, 0), (0, w_1), \cdots, (0, w_m)$$

(補題1.6) に関する G の表現が $A \oplus B$ である．

命題2.3 G - K - 加群の G - K - 同型類全体の集合 $M_K(G)$ は直和 $\oplus$ に関して半加群をつくる．すなわち G - K - 加群 V, W, U に対して，つぎの G - K - 加群の同型が存在する (命題1.5)．

(1) $V \oplus W \cong W \oplus V$

(2) $V \oplus (W \oplus U) \cong (V \oplus W) \oplus U$

(3) $V \oplus 0 \cong V$

(3) テンソル積表現

定義 V, W を G - K - 加群とする．V と W の K - 加群としてのテンソル積 $V \otimes_K W$ において $x \in G$ の作用を

$$x(u \otimes w) = xu \otimes xw \qquad u \in V, \ w \in W$$

と定義すると，$V \otimes_K W$ は G - K - 加群になる．この G - K - 加群 $V \otimes_K W$ を V と W の**テンソル積 G - K - 加群**という．G - K - 加群 $V \otimes_K W$ を略して $V \otimes W$ ともかく．

定義* $A: G \to GL(n, K)$, $B: G \to GL(m, K)$ を G の表現とする．写像 $C: G \to GL(nm, K)$ を

$$C(x) = A(x) \otimes B(x) = \begin{pmatrix} A(x)b_{11}(x) \cdots A(x)b_{1m}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(x)b_{m1}(x) \cdots A(x)b_{mm}(x) \end{pmatrix} \qquad B = \big(b_{lk}\big)$$

(45 頁参照) と定義すると，C は G の表現となる．この表現 C を $A \otimes B$ で表わし，A

と B の**テンソル積表現**という.

補題2.4　V, W を G-K-加群とする.　V, W に基 $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_m$ をとり, それらの基に関する G の表現をそれぞれ A, B とする. このとき G-K-加群 $V\otimes W$ の基

$$u_1\otimes w_1,\ u_2\otimes w_1,\ \cdots,\ u_n\otimes w_1,\ u_1\otimes w_2,\ \cdots,\ u_n\otimes w_2,\ \cdots,\ \cdots,\ u_n\otimes w_m$$

(補題1.10) に関する G の表現が $A\otimes B$ である.

証明
$$xu_i=\sum_{k=1}^{n}u_k a_{ki}(x),\qquad xw_j=\sum_{l=1}^{m}w_l b_{lj}(x)\qquad x\in G$$

とするとき

$$x(u_i\otimes w_j)=xu_i\otimes xw_j=\sum_k u_k a_{ki}(x)\otimes\sum_l w_l b_{lj}(x)=\sum_{k,l}(u_k\otimes w_l)a_{ki}(x)b_{lj}(x)$$

となるからである.

命題2.5　G-K-加群の G-K-同型類全体の集合 $M_K(G)$ は, 直和 $\oplus$ とテンソル積 $\otimes$ に関して単位元 K をもつ可換半環をつくる. すなわち G-K-加群 V, W, U に対して, 命題2.3のほかにつぎの G-K-加群の同型が存在する (命題1.9).

(1)　$V\otimes W\cong W\otimes V$

(2)　$V\otimes(W\otimes U)\cong(V\otimes W)\otimes U$

(3)　$(V\oplus W)\otimes U\cong(V\otimes U)\oplus(W\otimes U)$

(4)　$V\otimes K\cong V$

(4)　双対表現

定義　V を G-K-加群とする.　V の双対 K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ において $x\in G$ の作用を

$$(x\xi)(u)=\xi(x^{-1}u)\qquad \xi\in\mathrm{Hom}_K(V, K),\ u\in V$$

と定義すると, $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ は G-K-加群になる. この G-K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ を V の**双対 G-K-加群** (または**反傾 G-K-加群**) という. G-K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ を $\hat{V}$ ともかく.

定義*　$A: G\to GL(n, K)$ を G の表現とする. 写像 $\hat{A}: G\to GL(n, K)$ を

$$\hat{A}(x)={}^t(A(x^{-1}))\qquad x\in G$$

と定義すると, $\hat{A}$ は G の表現になる.　この表現 $\hat{A}$ を A の**双対表現** (または**反傾表現**) という.

補題2.6　V を G-K-加群とする.　V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり, この基に関する G

の表現を A とする. $u_1, \cdots, u_n$ の双対基 $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \hat{V}$ をとるとき, $\hat{V}$ のこの基に関する G の表現が $\hat{A}$ である.

証 明

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n, \quad x \in G$$

とするとき

$$x\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_{ij}(x^{-1}) \qquad i = 1, \cdots, n \tag{i}$$

がなりたつ. 実際,

$$(x\xi_i)(u_k) = \xi_i(x^{-1}u_k) = \xi_i(\sum_{j=1}^{n} u_j a_{jk}(x^{-1})) = \sum_{j=1}^{n} \xi_i(u_j) a_{jk}(x^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk}(x^{-1})$$
$$= a_{ik}(x^{-1})$$

であり, 一方

$$(\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_{ij}(x^{-1}))(u_k) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(u_k) a_{ij}(x^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk} a_{ij}(x^{-1}) = a_{ik}(x^{-1})$$

となり一致するから (i) を得る.

命 題 2.7 G - K - 加群 V, W に対して, つぎの G - K - 加群の同型が存在する.

(1) $\mathrm{Hom}_K(V \oplus W, K) \cong \mathrm{Hom}_K(V, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(W, K)$

(2) $\mathrm{Hom}_K(V \otimes W, K) \cong \mathrm{Hom}_K(V, K) \otimes \mathrm{Hom}_K(W, K)$

(3) $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K) \cong V$

証 明 (1) K - 同型写像 $f: \mathrm{Hom}_K(V, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V \oplus W, K)$

$$f(\xi, \eta)(u, w) = \xi(u) + \eta(w) \qquad u \in V, \quad w \in W$$

(命題 1.12 (1)) は G - K - 加群の同型を与えている. 実際, $x \in G$ に対して

$$(f(x(\xi, \eta)))(u, w) = (f(x\xi, x\eta))(u, w) = (x\xi)(u) + (x\eta)(w)$$
$$= \xi(x^{-1}u) + \eta(x^{-1}w) = (f(\xi, \eta))(x^{-1}u, x^{-1}w)$$
$$= (f(\xi, \eta))(x^{-1}(u, w)) = (x(f(\xi, \eta)))(u, w)$$

より $f(x(\xi, \eta)) = x(f(\xi, \eta))$ となるからである.

(2) K - 同型写像 $f: \mathrm{Hom}_K(V, K) \otimes \mathrm{Hom}_K(W, K) \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, K)$

$$(f(\xi \otimes \eta))(u \otimes w) = (\xi(u))(\eta(w)) \qquad u \in V, \quad w \in W$$

(命題 1.12 (2)) は G - K - 加群の同型を与えている. 実際, $x \in G$ に対して

$$(f(x(\xi \otimes \eta)))(u \otimes w) = (f(x\xi \otimes x\eta))(u \otimes w) = ((x\xi)(u))((x\eta)(w))$$
$$= (\xi(x^{-1}u))(\eta(x^{-1}w)) = (f(\xi \otimes \eta))(x^{-1}u \otimes x^{-1}w)$$
$$= (f(\xi \otimes \eta))(x^{-1}(u \otimes w)) = (x(f(\xi \otimes \eta)))(u \otimes w)$$

より $f(x(\xi\otimes\eta))=x(f(\xi\otimes\eta))$ となるからである.

（3） K - 同型写像 $f\colon V\to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$

$$(f(u))(\xi)=\xi(u) \qquad \xi\in \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

（命題1.12（3））は G - K - 加群の同型を与えている．実際，$x\in G$ に対して

$$(f(xu))(\xi)=\xi(xu)=(x^{-1}\xi)(u)=(f(u))(x^{-1}\xi)=(x(f(u)))(\xi)$$

より $f(xu)=x(f(u))$ となるからである.

例 2.5 V, W を G - K - 加群とする． K - 加群 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$（例1.17）において $x\in G$ の作用を

$$(x\xi)(u)=x(\xi(x^{-1}u)) \qquad \xi\in \mathrm{Hom}_K(V, W),\ u\in V$$

と定義すると，$\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は G - K - 加群になる．この G - K - 加群 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は $\mathrm{Hom}_K(V, K)\otimes W$ に G - K - 同型である：

$$\mathrm{Hom}_K(V, W)\cong \mathrm{Hom}_K(V, K)\otimes W$$

実際，写像 $f\colon \mathrm{Hom}_K(V, K)\otimes W\to \mathrm{Hom}_K(V, W)$ を

$$(f(\xi\otimes w))(u)=w(\xi(u)) \qquad \xi\in \mathrm{Hom}_K(V, K),\ u\in V,\ w\in W$$

と定義すると，まず f は K - 同型写像であることがわかる．さらに

$$\begin{aligned}(f(x(\xi\otimes w)))(u)&=(f(x\xi\otimes xw))(u)=(xw)((x\xi)(u))=(xw)(\xi(x^{-1}u))\\&=x(w(\xi(x^{-1}u)))=x((f(\xi\otimes w))(x^{-1}u))=(x(f(\xi\otimes w)))(u)\end{aligned}$$

より $f(x(\xi\otimes w))=x(f(\xi\otimes w))$ となるので，f は G - K - 同型写像である． このように G - K - 加群 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は， 双対表現とテンソル積表現を用いて表わすことができるので，新しい形の表現であるとはいえない.

命題 2.8 V を 1 次元 G - K - 加群とするとき， つぎの G - K - 加群の同型が存在する.

$$\hat{V}\otimes V\cong K$$

証明 写像 $f\colon \hat{V}\otimes V\to K$

$$f(\xi\otimes u)=\xi(u) \qquad \xi\in\hat{V},\ u\in V$$

は K - 同型写像であり，さらに $x\in G$ に対して

$$f(x(\xi\otimes u))=f(x\xi\otimes xu)=(x\xi)(xu)=\xi(x^{-1}xu)=\xi(u)=f(\xi\otimes u)$$

となるので，f は G - K - 同型写像である（例 2.5 参照).

この命題2.8がなりたつので，V が 1 次元 G - K - 加群のときには，V の双対 G - K - 加群 $\hat{V}$ を V^{-1} とかくこともある.

(5) 共役表現

定義 VをG-K-加群とする．Vの共役K-加群$\overline{V}$において$x \in G$の作用はもとのVにおける作用と同じにすると，$\overline{V}$はG-K-加群になる．このG-K-加群$\overline{V}$をVの**共役G-K-加群**という．$K = \boldsymbol{R}$のときには$\overline{V} = V$である．

定義* $A: G \to GL(n, K)$, $A = \left(a_{ji}\right)$をGの表現とする．写像$\overline{A}: G \to GL(n, K)$を

$$\overline{A}(x) = \overline{A(x)} = \left(\overline{a_{ji}(x)}\right)$$

と定義すると，$\overline{A}$はGの表現になる．この表現$\overline{A}$をAの**共役表現**という．

補題2.9 VをG-K-加群とする．Vに基$u_1, \cdots, u_n$をとり，この基に関するGの表現をAとする．このとき$\overline{V}$の同じ基$u_1, \cdots, u_n$に関するGの表現が$\overline{A}$である．

証明 $xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot \overline{a_{ji}(x)}$, $x \in G$となるからである．

命題2.10 G-K-加群V, Wに対して，つぎのG-K-加群の同型が存在する．

(1) $\overline{V \oplus W} \cong \overline{V} \oplus \overline{W}$

(2) $\overline{V \otimes W} \cong \overline{V} \otimes \overline{W}$

(3) $\overline{\overline{V}} \cong V$

(4) $\overline{\mathrm{Hom}_K(V, K)} \cong \mathrm{Hom}_K(\overline{V}, K)$

証明 命題1.13よりいずれも明らかであるが，念のため(4)を証明してみよう．K-同型写像$f: \overline{\mathrm{Hom}_K(V, K)} \to \mathrm{Hom}_K(\overline{V}, K)$

$$f(\xi) = \bar{\xi}$$

(命題1.13(4))はG-K-同型写像である．実際，$x \in G$に対して

$$(f(x\xi))(u) = \overline{x\xi}(u) = \overline{x\xi(u)} = \overline{\xi(x^{-1}u)} = \bar{\xi}(x^{-1}u) = (f(\xi))(x^{-1}u)$$
$$= (x(f(\xi)))(u) \qquad u \in V$$

より$f(x\xi) = x(f(\xi))$となるからである．

(6) コンパクト群の双対表現と共役表現

コンパクト群Gの表現を考察するときには，双対表現と共役表現が一致することを示そう．そのために，まずつぎの基本的な命題からはじめる．

命題2.11 Gをコンパクト群とする．

(1) VをG-K-加群とするとき，Vに

$$(xu, xv) = (u, v) \qquad x \in G,\ u, v \in V$$

をみたす内積を与えることができる．

（1）* （i） $A: G \to GL(n, \boldsymbol{R})$ を G の $\boldsymbol{R}$-表現とするとき，ある $P \in GL(n, \boldsymbol{R})$ をとり

$$P^{-1}A(x)P \in O(n) \qquad x \in G$$

とすることができる．

（ii） $A: G \to GL(n, \boldsymbol{C})$ を G の $\boldsymbol{C}$-表現とするとき，ある $P \in GL(n, \boldsymbol{C})$ をとり

$$P^{-1}A(x)P \in U(n) \qquad x \in G$$

とすることができる．

証明 （1） Vに内積 $\boldsymbol{(}\ ,\ \boldsymbol{)}$ を与えて Vを内積をもつ K-加群にする（例1.14）．さて Vに新しい内積（ , ）を

$$(u, v) = \int \boldsymbol{(}yu, yv\boldsymbol{)}dy \qquad u, v \in V$$

で与えると，この内積は求める条件をみたしている．実際，この新しい内積（ , ）が，内積の条件をみたしていることを確かめるのは容易である．たとえば $(u, u) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = 0$ は命題1.68 (6) を用いるとよい．さて

$$(xu, xv) = \int \boldsymbol{(}yxu, yxv\boldsymbol{)}dy = \int \boldsymbol{(}yu, yv\boldsymbol{)}dy \ (\text{命題}1.68\,(7)) = (u, v)$$

となる．

（1）* （1）の性質をもつ内積に関する Vの正規直交基をとり，この基に関する表現を考えると (1)* は (1) の結果であるが，ここでは行列の性質を用いて直接の証明を与えてみよう．$\int A(y)A^*(y)dy$[†] $= \tilde{P}$ とおくと $\tilde{P}$ は正値 K-Hermite 行列[††] である． 実際，$\tilde{P}$ が K-Hermite 行列であることは明らかであるが，正値であることは，任意の $\boldsymbol{a} \in K^n$ に対して

$$(\tilde{P}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = ((\int A(y)A^*(y)dy)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \int (A(y)A^*(y)\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})dy$$

$$= \int (A^*(y)\boldsymbol{a}, A^*(y)\boldsymbol{a})dy \geqq 0 \ (\text{命題}1.68\,(3))$$

であり，さらに $(\tilde{P}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ のときには $(A^*(y)\boldsymbol{a}, A^*(y)\boldsymbol{a}) = 0$（命題1.68 (6)），よ

† 連続写像 $A = \left(a_{ji}\right): G \to M(n, K)$ に対し，$\int A(x)dx$ とは行列 $\left(\int a_{ji}(x)dx\right) \in M(n, K)$ のことである．

†† 正値 K-Hermite 行列の定義と性質は〔21〕51 頁にある．

って $A^*(y)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, さらにこれより $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ となるからである．そして，この $\tilde{P}$ は

$$A(x)\tilde{P}A^*(x)=\tilde{P} \qquad x\in G$$

をみたしている．実際，

$$A(x)\tilde{P}A^*(x)=A(x)\Bigl(\int A(y)A^*(y)dy\Bigr)A^*(x)=\int A(x)A(y)A^*(y)A^*(x)dy$$

$$=\int A(xy)A^*(xy)dy=\int A(y)A^*(y)dy\ (\text{命題}1.68\,(5))=\tilde{P}$$

である．さて正値 K-Hermite 行列 $\tilde{P}$ は，ある正値 K-Hermite 行列 P を用いて $\tilde{P}=PP$ と表わされる（〔21〕補題 24）ので，上式は $A(x)PPA^*(x)=PP$ となる．これより $P^{-1}A(x)PPA^*(x)P^{-1}=E$, $(P^{-1}A(x)P)(P^{-1}A(x)P)^*=E$, すなわち $P^{-1}A(x)P\in O(n)$; $U(n)$ となる．以上で命題が証明された．

例 2.6　$O(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^n$, $SO(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^n$, $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$, $SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$（例 2.1）を考えよう．これらをすべて K^n とかくことにする．このとき例 1.14 で与えた K^n の内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_ib_i$ は，命題 2.11 (1) の性質をもつ内積である．

命題 2.12　G をコンパクト群とするとき，G-K-加群 V に対して，つぎの G-K-加群の同型が存在する．

$$\overline{V}\cong \mathrm{Hom}_K(V,K)$$

証明　V に命題 2.11 (1) の性質をみたす内積を与える．この内積を用いて命題 1.14 の K-同型写像 $f:\overline{V}\to\mathrm{Hom}_K(V,K)$,

$$f(u)=\xi_u$$

をつくると，f は G-K-同型写像である．実際，$x\in G$ に対して

$$(f(xu))(v)=(xu,v)=(u,x^{-1}v)=(f(u))(x^{-1}v)=(x(f(u)))(v) \qquad v\in V$$

より $f(xu)=x(f(u))$ となるからである．（指標による特徴づけ（命題 2.47）を用いると，この命題の別証明を命題 2.44 が与えている）．

例 2.7　$U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$（例 2.1）を例にとって，命題 2.12 の $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-同型

$$\mathrm{Hom}_C(\boldsymbol{C}^n,\boldsymbol{C})\cong\overline{\boldsymbol{C}^n}$$

の証明をふりかえってみよう．$\boldsymbol{C}^n$ に標準基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ をとり，$\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathrm{Hom}_C(\boldsymbol{C}^n,\boldsymbol{C})$ をその双対基とする（例 2.6, 例 1.18 参照）．このとき $A=\left(a_{ji}\right)\in U(n)$ は

$$A\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{e}_ja_{ji} \qquad i=1,\cdots,n$$

であるのに対して

$$A\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \bar{a}_{ji} \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたしている．実際，$A \in U(n)$ は $A^{-1} = {}^t\bar{A}$ をみたすので（補題2.6と同じ計算をすると）

$$(A\xi_i)(e_j) = \xi_i(A^{-1}e_j) = \xi_i({}^t\bar{A}e_j) = \xi_i(\sum_k e_k \bar{a}_{jk}) = \sum_k \xi_i(e_k)\bar{a}_{jk} = \sum_k \delta_{ik}\bar{a}_{jk} = \bar{a}_{ji}$$

となるからである．以上で $U(n)$ - $\boldsymbol{C}$ - 同型 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}) \cong \bar{\boldsymbol{C}}^n$ が示された．$SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 加群 $\boldsymbol{R}^n$（例2.1）に対しても全く同様な状態にあって，$SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 同型

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}^n$$

がなりたっている．

（7） 外積表現

定義 V を G - K - 加群とする．K - 加群 V の次数 r の外積 K - 加群 $\Lambda^r(V)$ ($r = 0, 1, \cdots, n = \dim_K V$) において $x \in G$ の作用を

$$x(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = xu_1 \wedge \cdots \wedge xu_r \qquad u_1, \cdots, u_r \in V$$

と定義すると，$\Lambda^r(V)$ は G - K - 加群になる．この G - K - 加群 $\Lambda^r(V)$ を V の**次数 r の外積 G - K - 加群**という．

定義* $A = \left(a_{ji}\right) : G \to GL(n, K)$ を G の表現とする．2組の r 個の整数の組 $(i_1, \cdots, i_r)$, $1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n$; $(j_1, \cdots, j_r)$, $1 \leqq j_1 < \cdots < j_r \leqq n$ に対して

$$a_{j_1 \cdots j_r,\, i_1 \cdots i_r}(x) = \det \begin{array}{c} \\ j_1 \\ \\ j_r \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} & \overset{i_1}{\vdots} & & \overset{i_r}{\vdots} & \\ \cdots & a_{j_1 i_1}(x) & \cdots & a_{j_1 i_r}(x) & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{j_r i_1}(x) & \cdots & a_{j_r i_r}(x) & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \qquad x \in G$$

（上式の右辺は $A(x)$ の j_1 行，$\cdots$，j_r 行；i_1 列，$\cdots$，i_r 列の交点の元 $a_{ji}(x)$ からできる r 次の行列の行列式のことである）とおき，写像 $A^{(r)} : G \to GL\left(\binom{n}{r}, K\right)$ を

$$A^{(r)}(x) = {\scriptstyle (j_1, \cdots, j_r)}\begin{pmatrix} & \overset{(i_1, \cdots, i_r)}{\vdots} & \\ \cdots & a_{j_1 \cdots j_r,\, i_1 \cdots i_r}(x) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \qquad x \in G$$

と定義すると，$A^{(r)}$ は G の表現になる．この表現 $A^{(r)}$ を A の**次数 r の外積表現**という．

注意 G の表現 A に対して $A^{(r)}$ がまた G の表現となること，すなわち

$$A^{(r)}(xy) = A^{(r)}(x)A^{(r)}(y) \qquad x, y \in G$$
$$A^{(r)}(e) = E \qquad e \text{ は } G \text{ の単位元}$$

がなりたつことを確かめなければならない．このことは行列式の性質に詳しい人には自明であろうが，そうでなければ案外簡単でないかもしれない．そのときには，つぎの補題2.13により $A^{(r)}$ が G－K－加群 $\Lambda^r(V)$ に対応する表現であることを知ってから $A^{(r)}(xy) = A^{(r)}(x)A^{(r)}(y)$ を導くとよい．このことは，さきのテンソル積表現 $A \otimes B$ についてもいえることである．

補題2.13　V を G－K－加群とする．V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とする．このとき $\Lambda^r(V)$ の基として $\binom{n}{r}$ 個の元

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} \qquad 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n$$

をとる（命題1.23）とき，この基に関する G の表現が $A^{(r)}$ である．

証明
$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n, \ x \in G$$

とするとき

$$\begin{aligned}
&x(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) \qquad i_1 < \cdots < i_r \\
&= xu_{i_1} \wedge \cdots \wedge xu_{i_r} = \sum_{j_1} u_{j_1} a_{j_1 i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \sum_{j_r} u_{j_r} a_{j_r i_r}(x) \\
&= \sum_{j_1, \cdots, j_r} (u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_r}) a_{j_1 i_1}(x) \cdots a_{j_r i_r}(x) \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_r} (u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_r}) \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma a_{k_1 i_1}(x) \cdots a_{k_r i_r}(x) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_r} (u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_r}) a_{j_1 \cdots j_r, i_1 \cdots i_r}(x)
\end{aligned}$$

となるから，これより補題を得る．

例2.8　n 次元 G－K－加群 V に対して，$\Lambda^n(V)$ は1次元 G－K－加群である．このことはつぎの事実に対応している．G の表現 $A: G \to GL(n, K)$ に対して写像 $B: G \to GL(1, K)$ を

$$B(x) = \det A(x)$$

と定義すると，B も G の表現となる：$B = A^{(n)}$．実際，V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とするとき

$$x(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) \det A(x)$$

となるからである．

命題2.14　G－K－加群 V に対して，つぎの G－K－加群の同型が存在する．

（1）　$\Lambda^r(\mathrm{Hom}_K(V, K)) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^r(V), K)$

（2）　$\Lambda^r(\overline{V}) \cong \overline{\Lambda^r(V)}$

証明　（1）　K-同型写像 $f\colon \Lambda^r(\mathrm{Hom}_K(V, K)) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^r(V), K)$

$$(f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r))(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = \det\left(\xi_j(u_i)\right) \qquad \begin{array}{l}\xi_1, \cdots, \xi_r \in \mathrm{Hom}_K(V, K)\\ u_1, \cdots, u_r \in V\end{array}$$

（命題1.24(1)）は G-K-加群の同型を与えている．実際，$x \in G$ に対して

$$\begin{aligned}(f(x(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)))(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) &= (f(x\xi_1 \wedge \cdots \wedge x\xi_r))(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)\\ &= \det\left((x\xi_j)(u_i)\right) = \det\left(\xi_j(x^{-1}u_i)\right)\\ &= (f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r))(x^{-1}u_1 \wedge \cdots \wedge x^{-1}u_r)\\ &= (f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r))(x^{-1}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r))\\ &= (x(f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)))(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r)\end{aligned}$$

より $f(x(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r)) = x(f(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_r))$ となるので，f は G-K-同型写像である．

(2) は容易である（命題1.24(2)参照）．

例 2.9　G を $SL(n, K)$ の部分群とし，K^n を G-K-加群とみる（例2.1. たとえば $SO(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^n$，$SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$ を考える）．このとき，つぎの G-K-加群の同型が存在する．

$$\Lambda^r(K^n) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-r}(K^n), K)$$

実際，$\Lambda^n(K^n)$ は1次元 K-加群であり，また $A \in G$，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in K^n$ に対して

$$A(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n)\det A = \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n$$

となるから，$\Lambda^n(K^n)$ における $A \in G$ の作用は自明である．したがって $\Lambda^n(K^n) = K$ とみなす（例2.3）ことにする．さて K-準同型写像 $f\colon \Lambda^r(K^n) \to \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-r}(K^n), K)$ を

$$(f(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r))(\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r \wedge \boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n \qquad \boldsymbol{a}_i \in K^n$$

をみたすように定義すると，f は K-同型写像になる（補題1.4）．さらに $A \in G$ に対して

$$\begin{aligned}&(f(A(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r)))(\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n)\\ &= (f(A\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge A\boldsymbol{a}_r))(\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n)\\ &= A\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge A\boldsymbol{a}_r \wedge \boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n\\ &= \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r \wedge A^{-1}\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge A^{-1}\boldsymbol{a}_n\end{aligned}$$

$$= (f(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r))(A^{-1}\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge A^{-1}\boldsymbol{a}_n)$$
$$= (f(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r))(A^{-1}(\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n))$$
$$= (A(f(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r)))(\boldsymbol{a}_{r+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_n)$$

より $f(A(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r)) = A(f(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_r))$ となるので，f は G - K - 同型写像である．よって $\Lambda^r(K^n) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-r}(K^n), K)$ である．K^n に基 $u_1, \cdots, u_n$ を

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$$

($\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は K^n の標準基）をみたすようにとるとき，上記の G - K - 同型写像 f は，$i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_{n-r}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_{n-r} \end{pmatrix}$ として

$$f(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r})(u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_{n-r}}) = \begin{cases} 0 & \sigma \text{ が置換でないとき} \\ \mathrm{sgn}\,\sigma & \sigma \text{ が置換のとき} \end{cases}$$

をみたしている．したがって $\Lambda^{n-r}(K^n)$ の基 $\cdots, u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_{n-r}}, \cdots$ の双対基を $\cdots, \xi_{j_1 \cdots j_{n-r}}, \cdots \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{n-r}(K^n), K)$ とすると

$$f(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) = \mathrm{sgn}\,\sigma \xi_{j_1 \cdots j_{n-r}}$$

となっている．

例 2.10　$SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 加群 $\boldsymbol{R}^n$（例 2.1）に対して，つぎの $SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 加群の同型が存在する．

$$\Lambda^r(\boldsymbol{R}^n) \cong \Lambda^{n-r}(\boldsymbol{R}^n)$$

実際，$\boldsymbol{R}^n$ に標準基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をとり，$\boldsymbol{R}$ - 準同型写像 $f = f_r : \Lambda^r(\boldsymbol{R}^n) \to \Lambda^{n-r}(\boldsymbol{R}^n)$ を，$i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_{n-r}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_{n-r} \end{pmatrix}$ として

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_r}) = \mathrm{sgn}\,\sigma \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_{n-r}}$$

をみたすように定義すると，f は $SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 加群の同型を与えている．f が $SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 同型写像であることを示すことのうちで

$$f(A(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_r})) = A(f(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_r}))$$

を直接計算で示すのは案外簡単でない．だから，つぎのようにして証明しよう．

$$\Lambda^r(\boldsymbol{R}^n) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\Lambda^{n-r}(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}) \quad (\text{例 } 2.9)$$
$$\cong \Lambda^{n-r}(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R})) \quad (\text{命題 } 2.14\,(1))$$
$$\cong \Lambda^{n-r}(\boldsymbol{R}^n) \quad (\text{命題 } 2.12)$$

この $SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 同型対応を合成した写像が f になっているのである．この f は，もっと一般に

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

をみたす $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基 $u_1, \cdots, u_n$ をとるとき

$$f(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) = \mathrm{sgn}\, \sigma u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_{n-r}}$$

となっているので，これを示そう．実際，$u_1, \cdots, u_n$ の双対基を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とするとき，前記の $SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 同型対応により順次

$$\begin{aligned} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} &\to \mathrm{sgn}\, \sigma \xi_{j_1 \cdots j_{n-r}} \quad (\text{例 } 2.9) \\ &\to \mathrm{sgn}\, \sigma \xi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_{n-r}} \quad (\text{命題 } 2.14\,(1)) \\ &\to \mathrm{sgn}\, \sigma u_{j_1} \wedge \cdots \wedge u_{j_{n-r}} \quad (\text{命題 } 2.12,\ \text{例 } 1.18) \end{aligned}$$

に移るからである．なお，この f は

$$f_{n-r} f_r = (-1)^{r(n-r)} : \Lambda^r(\boldsymbol{R}^n) \to \Lambda^r(\boldsymbol{R}^n)$$

をみたしている．

つぎの補題は 4, 5 章でしばしば用いられる．

補題 2.15 $V_1, \cdots, V_n$ を 1 次元 G - K - 加群とするとき，つぎの G - K - 加群の同型が存在する．

$$\Lambda^r(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \cong \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_r} (V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_r})$$

証明 まず，これら 2 つの G - K - 加群の次元がともに $\binom{n}{r}$ であって等しいことに注意すると，K - 準同型写像 $f: \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_r} (V_{i_1} \otimes \cdots \otimes V_{i_r}) \to \Lambda^r(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$

$$f(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r}) = u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r} \qquad u_i \in V_i,\ i_1 < \cdots < i_r$$

は K - 同型写像であることがわかる (補題 1.4)．さらに $x \in G$ に対して

$$\begin{aligned} f(x(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r})) &= f(xu_{i_1} \otimes \cdots \otimes xu_{i_r}) = xu_{i_1} \wedge \cdots \wedge xu_{i_r} \\ &= x(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) = x(f(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r})) \end{aligned}$$

となるから，f は G - K - 同型写像である．

(8) 体の制限と拡大

定義 V を G - $\boldsymbol{C}$ - 加群とする．V の実制限 $\boldsymbol{R}$ - 加群 $V_{\boldsymbol{R}}$ において $x \in G$ の作用はもとの V における作用と同じにすると，$V_{\boldsymbol{R}}$ は G - $\boldsymbol{R}$ - 加群になる．この G - $\boldsymbol{R}$ - 加群 $V_{\boldsymbol{R}}$ を V の**実制限 G - $\boldsymbol{R}$ - 加群**という．

定義* $A: G \to GL(n, \boldsymbol{C})$ を G の $\boldsymbol{C}$ - 表現とする．$A(x) = \big(a_{ji}(x)\big)$，$a_{ji}(x) = \alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)$，$\alpha_{ji}(x), \beta_{ji}(x) \in \boldsymbol{R}$，$x \in G$ とし，写像 $A_{\boldsymbol{R}}: G \to GL(2n, \boldsymbol{R})$ を

$$A_{\boldsymbol{R}}(x) = \left(\begin{array}{cc} \alpha_{ji}(x) & -\beta_{ji}(x) \\ \beta_{ji}(x) & \alpha_{ji}(x) \end{array} \right)$$

と定義すると，$A_{\boldsymbol{R}}$ は G の $\boldsymbol{R}$ - 表現となる．この $\boldsymbol{R}$ - 表現 $A_{\boldsymbol{R}}$ を A の **実制限表現** という．

補題 2.16 V を G - $\boldsymbol{C}$ - 加群とする．V に $\boldsymbol{C}$ - 基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の $\boldsymbol{C}$ - 表現を A とする．このとき G - $\boldsymbol{R}$ - 加群 $V_{\boldsymbol{R}}$ の $\boldsymbol{R}$ - 基 $u_1, u_1\boldsymbol{i}, \cdots, u_n, u_n\boldsymbol{i}$（補題 1.25）に関する G の $\boldsymbol{R}$ - 表現が $A_{\boldsymbol{R}}$ である．

証明 $A(x) = \left(a_{ji}(x)\right)$, $a_{ji}(x) = \alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)$, $\alpha_{ji}(x)$, $\beta_{ji}(x) \in \boldsymbol{R}$, $x \in G$ とするとき

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)) = \sum_{j=1}^{n} (u_j\alpha_{ji}(x) + u_j\boldsymbol{i}\beta_{ji}(x))$$

$$x(u_i\boldsymbol{i}) = (xu_i)\boldsymbol{i} = \sum_{j=1}^{n} (u_j\alpha_{ji}(x) + u_j\boldsymbol{i}\beta_{ji}(x))\boldsymbol{i} = \sum_{j=1}^{n} (-u_j\beta_{ji}(x) + u_j\boldsymbol{i}\alpha_{ji}(x))$$

となるからである．

命題 2.17 G - $\boldsymbol{C}$ - 加群 V, W に対して，つぎの G - $\boldsymbol{R}$ - 加群の同型が存在する（命題 1.26）．

$$(V \oplus W)_{\boldsymbol{R}} \cong V_{\boldsymbol{R}} \oplus W_{\boldsymbol{R}}$$

定義 V を G - $\boldsymbol{R}$ - 加群とする．V の複素化 $\boldsymbol{C}$ - 加群 $V \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ において $x \in G$ の作用を

$$x(u \otimes \alpha) = xu \otimes \alpha \qquad u \in V, \ \alpha \in \boldsymbol{C}$$

みたすように定義すると，$V \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ は G - $\boldsymbol{C}$ - 加群になる．この G - $\boldsymbol{C}$ - 加群 $V \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を V の **複素化 G - $\boldsymbol{C}$ - 加群** という．G - $\boldsymbol{C}$ - 加群 $V \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ を $V^{\boldsymbol{C}}$ ともかく．

定義* $A : G \to GL(n, \boldsymbol{R})$ を G の $\boldsymbol{R}$ - 表現とする．$GL(n, \boldsymbol{R})$ は自然な方法で $GL(n, \boldsymbol{C})$ の部分群とみなせるので，$j : GL(n, \boldsymbol{R}) \to GL(n, \boldsymbol{C})$ を包含写像とする．このとき写像 $A^{\boldsymbol{C}} : G \to GL(n, \boldsymbol{C})$ を

$$A^{\boldsymbol{C}} = jA$$

と定義すると，$A^{\boldsymbol{C}}$ は G の $\boldsymbol{C}$ - 表現となる．（行列 $A^{\boldsymbol{C}}(x)$ の形は $A(x)$ と全く同じであるが，それを $GL(n, \boldsymbol{R})$ の元と思うか $GL(n, \boldsymbol{C})$ の元と思うかの相異である）．この $\boldsymbol{C}$ - 表現 $A^{\boldsymbol{C}}$ を A の **複素化表現** という．

補題 2.18　V を G-$\boldsymbol{R}$-加群とする．V に $\boldsymbol{R}$-基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関するる G の $\boldsymbol{R}$-表現を A とする．このとき G-$\boldsymbol{C}$-加群 $V^{\boldsymbol{C}}$ の $\boldsymbol{C}$-基 $u_1 \otimes 1, \cdots, u_n \otimes 1$（補題 1.27）に関する G の $\boldsymbol{C}$-表現が $A^{\boldsymbol{C}}$ である．

証明　$x(u_i \otimes 1) = xu_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \otimes 1 = \sum_{j=1}^{n} (u_j \otimes 1) a_{ji}(x), \quad x \in G$

となるからである．

命題 2.19　G-$\boldsymbol{R}$-加群 V, W に対して，つぎの G-$\boldsymbol{C}$-加群の同型が存在する．

（1）　$(V \oplus W)^{\boldsymbol{C}} \cong V^{\boldsymbol{C}} \oplus W^{\boldsymbol{C}}$

（2）　$(V \otimes_{\boldsymbol{R}} W)^{\boldsymbol{C}} \cong V^{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{C}} W^{\boldsymbol{C}}$

（3）　$(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(V, \boldsymbol{R}))^{\boldsymbol{C}} \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(V^{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{C})$

（4）　$V^{\boldsymbol{C}} \cong \overline{V^{\boldsymbol{C}}}$

（5）　$(\Lambda^r(V))^{\boldsymbol{C}} \cong \Lambda^r(V^{\boldsymbol{C}})$

証明　命題 1.28 で与えた $\boldsymbol{C}$-同型写像 f は，いずれも G-$\boldsymbol{C}$-同型を与えている．

命題 2.20　G-$\boldsymbol{R}$-加群 V に対して，つぎの G-$\boldsymbol{R}$-加群の同型が存在する．

$$(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}} \cong V \oplus V$$

証明　V に $\boldsymbol{R}$-基 $u_1, \cdots, u_n$ をとるとき，$u_1 \otimes 1, \cdots, u_n \otimes 1,\ u_1 \otimes \boldsymbol{i}, \cdots, u_n \otimes \boldsymbol{i}$ は $(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}}$ の $\boldsymbol{R}$-基になる（補題 1.25, 1.27）．$u_1 \otimes 1, \cdots, u_n \otimes 1;\ u_1 \otimes \boldsymbol{i}, \cdots, u_n \otimes \boldsymbol{i}$ より生成される $(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}}$ の部分 $\boldsymbol{R}$-加群をそれぞれ V_1, V_2 とすると，明らかに $(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}}$ は $\boldsymbol{R}$-加群 V_1, V_2 の直和になる：

$$(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}} = V_1 \oplus V_2$$

しかるに V_1, V_2 はともに V に G-$\boldsymbol{R}$-同型である：$V_1 \cong V \cong V_2$．実際，$x \in G$ に対して

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n$$

とするとき

$$x(u_i \otimes 1) = xu_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \otimes 1 = \sum_{j=1}^{n} (u_j \otimes 1) a_{ji}(x)$$

$$x(u_i \otimes \boldsymbol{i}) = xu_i \otimes \boldsymbol{i} = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \otimes \boldsymbol{i} = \sum_{j=1}^{n} (u_j \otimes \boldsymbol{i}) a_{ji}(x)$$

となるからである．よって $(V^{\boldsymbol{C}})_{\boldsymbol{R}}$ は $V \oplus V$ に G-$\boldsymbol{R}$-同型である．

命題 2.21　G-$\boldsymbol{C}$-加群 V に対して，つぎの G-$\boldsymbol{C}$-加群の同型が存在する．

$$(V_{R})^{C} \cong V \oplus \bar{V}$$

証明　V に C - 基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり

$$e_i = u_i \otimes 1 - u_i\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}, \qquad \hat{e}_i = -u_i \otimes \boldsymbol{i} + u_i\boldsymbol{i} \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと，$e_1, \cdots, e_n, \hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n$ は $(V_{R})^{C}$ の C - 基になる（補題1.25, 1.27）. $e_1, \cdots, e_n$; $\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n$ より生成される $(V_{R})^{C}$ の部分 C - 加群をそれぞれ V_1, V_2 とすると，明らかに $(V_{R})^{C}$ は C - 加群 V_1, V_2 の直和になる：

$$(V_{R})^{C} = V_1 \oplus V_2$$

しかるに V_1, V_2 はそれぞれ $V, \bar{V}$ に G - C - 同型である：$V_1 \cong V$, $V_2 \cong \bar{V}$. 実際，$x \in G$ に対して

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad a_{ji}(x) = \alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x),\ \alpha_{ji}(x),\ \beta_{ji}(x) \in \boldsymbol{R}$$

とするとき

$$\begin{aligned}
xe_i &= x(u_i \otimes 1 - u_i\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}) = xu_i \otimes 1 - xu_i\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} \\
&= \sum_j u_j(\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)) \otimes 1 - \sum_j u_j(\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x))\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} \\
&= \sum_j u_j \otimes \alpha_{ji}(x) + \sum_j u_j\boldsymbol{i} \otimes \beta_{ji}(x) - \sum_j u_j\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}\,\alpha_{ji}(x) + \sum_j u_j \otimes \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x) \\
&= \sum_j u_j \otimes (\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)) - \sum_j u_j\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i}(\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{jj}(x)) \\
&= \sum_j (u_j \otimes 1 - u_j\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i})(\alpha_{ji}(x) + \boldsymbol{i}\beta_{ji}(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}(x)
\end{aligned}$$

となるから，V_1 は V に G - C - 同型である．同様に

$$x\hat{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{e}_j \overline{a_{ji}(x)}$$

となるので，V_2 は $\bar{V}$ に G - C - 同型である．よって $(V_{R})^{C}$ は $V \oplus \bar{V}$ に G - C - 同型である．

例 2.11　$SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 加群 $\boldsymbol{R}^n$（例 2.1）の複素化 $SO(n)$ - C - 加群 $(\boldsymbol{R}^n)^C$ に対して，つぎの $SO(n)$ - C - 加群の同型が存在する．

$$\Lambda^r((\boldsymbol{R}^n)^C) \cong \Lambda^{n-r}((\boldsymbol{R}^n)^C)$$

（単にこれを示すだけならば，$SO(n)$ - $\boldsymbol{R}$ - 同型 $\Lambda^r(\boldsymbol{R}^n) \cong \Lambda^{n-r}(\boldsymbol{R}^n)$（例 2.10）の複素化と思えばよいのであるが，4 章で $SO(2n)$ - C - 加群 $\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)$ を詳しく調べる必要が起こるために以下のような考察をしている）．実際，

$$\begin{aligned}\Lambda^r((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}) &\cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(\Lambda^{n-r}((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}), \boldsymbol{C}) \quad (\text{例 } 2.9)\\ &\cong \Lambda^{n-r}(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{C})) \quad (\text{命題 } 2.14(1))\\ &\cong \Lambda^{n-r}(\overline{(\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}}) \quad (\text{命題 } 2.12)\\ &\cong \Lambda^{n-r}((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}) \quad (\text{命題 } 2.19(4))\end{aligned}$$

である．この合成した $SO(n)$-$\boldsymbol{C}$-同型写像 $f=f_r\colon \Lambda^r((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}) \to \Lambda^{n-r}((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}})$ を具体的に与えよう．$(\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}$ に正規直交 $\boldsymbol{C}$-基 $u_1, \cdots, u_n$ を

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = (\boldsymbol{e}_1 \otimes 1) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{e}_n \otimes 1)$$

($\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準 $\boldsymbol{R}$-基）をみたすようにするとき，f は

$$f(u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_r}) = \mathrm{sgn}\,\sigma \bar{u}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{u}_{j_{n-r}}$$

($i_1, \cdots, i_r;\ j_1, \cdots, j_{n-r}, \sigma$ は例 2.10 の通り）をみたしている（例 2.10 参照）．なおこの f は

$$f_{n-r}f_r = (-1)^{r(n-r)}\colon \Lambda^r((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}}) \to \Lambda^r((\boldsymbol{R}^n)^{\boldsymbol{C}})$$

をみたしている．

(9) 群準同型写像がひきおこす表現

G, G' を位相群とし，$h\colon G' \to G$ を連続な群準同型写像とする．

定義　V を G-K-加群とする．K-加群 V において $x' \in G'$ の作用を

$$x'u = h(x')u \qquad u \in V$$

と定義すると，V は G'-K-加群になる．この G'-K-加群を $h^\sharp(V)$ で表わし，V の **h によってひきおこされた G'-K-加群** という．

定義*　$A\colon G \to GL(n, K)$ を G の表現とする．写像 $B\colon G' \to GL(n, K)$ を

$$B(x') = A(h(x')) \qquad x' \in G'$$

と定義すると，B は G' の表現となる．この表現 B を $h^\sharp(A)$ で表わし，A の **h によってひきおこされた G' の表現** という．

補題 2.22　V を G-K-加群とする．V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とする．このとき $h^\sharp(V)$ の同じ基 $u_1, \cdots, u_n$ に関する G' の表現が $h^\sharp(A)$ である．

命題 2.23　(1)　$1\colon G \to G$ を恒等写像とするとき，G-K-加群 V に対して

$$1^\sharp(V) = V$$

がなりたつ．

(2)　G, G', G'' を位相群とし，$h'\colon G'' \to G'$, $h\colon G' \to G$ を連続な群準同型写像とす

るとき，G-K-加群 V に対して

$$(hh')^{\sharp}(V)=h'^{\sharp}(h^{\sharp}(V))$$

がなりたつ．

命題 2.24 G-K-加群 V, W に対して，つぎの G'-K-加群の同型が存在する．

(1) $h^{\sharp}(V\oplus W)\cong h^{\sharp}(V)\oplus h^{\sharp}(W)$

(2) $h^{\sharp}(V\otimes W)\cong h^{\sharp}(V)\otimes h^{\sharp}(W)$

(3) $h^{\sharp}(\mathrm{Hom}_K(V, K))\cong \mathrm{Hom}_K(h^{\sharp}(V), K)$

(4) $h^{\sharp}(\overline{V})\cong \overline{h^{\sharp}(V)}$

(5) $h^{\sharp}(\Lambda^r(V))\cong \Lambda^r(h^{\sharp}(V))$

証明 いずれも容易であるが，(3) を証明してみよう．$x'\in G'$ の作用は，左辺の定義は $\xi\in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ に対して $x'\xi=h(x')\xi$ であるから

$$(x'\xi)(u)=(h(x')\xi)(u)=\xi(h(x')^{-1}u)=\xi(h(x'^{-1})u) \qquad u\in V$$

であり，一方右辺の定義は

$$(x'\xi)(u)=\xi(x'^{-1}u)=\xi(h(x'^{-1})u) \qquad u\in V$$

であるから，両者は一致している．

§2. 既約表現と直交関係

(1) 既約表現と完全可約

G-K-加群の間に，直和，テンソル積，外積，双対 G-K-加群などいくつかの算法を定義して新しい G-K-加群をつくることを考えてきたが，これからしばらく直和の算法のみに注目して，与えられた G-K-加群をできるだけ細かくその部分 G-K-加群の直和に分解することを考えよう．

定義 (1) G-K-加群 V が部分 G-K-加群 W（ただし $W\neq 0$, $W\neq V$ とする）を含むとき，V は**可約**[†] であるという．

(2) 0と異なる G-K-加群 V が可約でないとき，すなわち W が V の部分 G-K-加群ならば，$W=0$ または $W=V$ となるとき，V は**既約**[†]（または**単純**）であるという．

(3) G-K-加群 V の任意の部分 G-K-加群 W に対して

[†] G-K-加群0は，可約であるとも既約であるともいわないことにする．したがって V が可約または既約 G-K-加群であるというときには，V は0でないと約束しておく．

$$V = W \oplus W'$$

となる V の部分 G-K-加群 W' が存在するとき，V は**完全可約**（または**半単純**）であるという．

定義* （1）* $A: G \to GL(n, K)$ を G の表現とする．行列 $P \in GL(n, K)$ が存在して

$$P^{-1}A(x)P = \begin{pmatrix} A_1(x) & * \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} A_1(x) \in GL(n_1, K), & A_2(x) \in GL(n_2, K) \\ n_1 + n_2 = n, & n_1 n_2 > 0 \end{array}$$

の形になるとき，A は**可約**であるという．（このとき $A_1: G \to GL(n_1, K)$，$A_2: G \to GL(n_2, K)$ もまた G の表現になっている）．

（2）* 表現 $A: G \to GL(n, K)$ が可約でないとき，A は**既約**であるという．

（3）* 表現 $A: G \to GL(n, K)$ が $\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ の形の表現に同値であるならば A が $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ の形に同値になるとき，A は**完全可約**であるという．

補題2.25 V を可約 G-K-加群とし，部分 G-K-加群 W（$W \neq 0$，$W \neq V$）を含むとする．W に基 $u_1, \cdots, u_m$ をとり，これに V の元 $u_{m+1}, \cdots, u_n$ をつけ加えて $u_1, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n$ が V の基となるようにする．V の基 $u_1, \cdots, u_n$，W の基 $u_1, \cdots, u_m$ および剰余 G-K-加群 V/W の基 $[u_{m+1}], \cdots, [u_n]$ に関する表現をそれぞれ A, A_1, A_2 とするとき，$A = \begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ となる．

なお，定義（2）と（2）*，（3）と（3）* もこのような関係で対応していることもみやすい．

例2.12 1次元 G-K-加群は既約である．

命題2.26 0と異なる G-K-加群 V に対して，つぎの3つの条件は同値である．

（1） V は完全可約である．

（2） V は既約部分 G-K-加群 V_i の直和である：

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

（3） V は既約部分 G-K-加群 V_i，$i \in I$ の和（必ずしも直和でない）である：

$$V = \sum_{i \in I} V_i$$

（これは V の任意の元 u が有限和 $u = \sum_i u_i$，$u_i \in V_i$ と表わされることである）．

証明 （1）⇒（2） V 自身が既約であれば明らかに（2）がなりたっているので，V は可約であるとしてよい．V_1 を V の0と異なる部分 G-K-加群のうちで最小次元のも

のの1つとすれば，V_1 は既約である． V は完全可約であるから，ある部分 G-K-加群 V' が存在して

$$V = V_1 \oplus V'$$

となる．V' が既約であれば (2) が証明できたことになる．V' が可約であれば，V' に含まれる 0 と異なる最小次元の部分 G-K-加群 V_2 をとると V_2 は既約である． $V_1 \cap V_2 = 0$ であるから， V_1 と V_2 の和 $V_1 + V_2$ は直和である：$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$. V は完全可約であるから，$V_1 \oplus V_2$ に対して

$$V = (V_1 \oplus V_2) \oplus V''$$

となる V の部分 G-K-加群 V'' が存在する． V'' が既約であれば (2) が証明されたことになる． V'' が可約であれば，さらに V'' の既約部分 G-K-加群 V_3 をとり … という操作を繰り返すならば，V は有限次元であることから，有限回で V は既約部分 G-K-加群の直和に分解される．

(2)⇒(3) は明らかである．

(3)⇒(1) W を V の部分 G-K-加群とする．W' を

$$W \cap W' = 0$$

をみたす V の部分 G-K-加群のうちで最大次元のものとすると， $V = W \oplus W'$ となることを示そう． そのためには $V = W + W'$ を示せばよいが，いまそうでないとしてみる．このとき $u \notin W + W'$ となる $u \in V$ が存在する．(3) の条件よりこの u は

$$u = v_1 + \cdots + v_r \qquad v_i \in V_i$$

と表わされているが，このうちのある v_i は $v_i \notin W + W'$ である．このとき当然 $V_i \not\subset W + W'$ となっている．しかるに V_i は既約であるから $V_i \cap (W + W') = 0$ となる．したがって $W' + V_i$ は $W \cap (W' + V_i) = 0$ をみたし， また $W' + V_i = W' \oplus V_i$ は W' より次元が大きいので， W' が $W \cap W' = 0$ をみたす最大次元の部分 G-K-加群であるということに反する． よって $V = W + W' = W \oplus W'$ となる． よって V は完全可約である．

この命題2.26より， 完全可約な G-K-加群 V は既約部分 G-K-加群 V_i の直和で表わされることがわかったが，この表し方が1通りであることを示そう． (G がコンパクト群であるときには，指標を用いたこの別証明が114頁の注意にある)． そのために，まずつぎの補題を準備する．

補題 2.27 V を完全可約な G-K-加群とし

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

を V の既約部分 G-K-加群への直和分解とする（命題2.26）. このとき V の任意の部分 G-K-加群 W に対して，$V_1, \cdots, V_r$ から適当な $V_{i_1}, \cdots, V_{i_k}$ を選び出して

$$V = W \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}$$

とすることができる.

証明 V_i は既約であるから，各 V_i に対し $V_i \cap W = 0$ か $V_i \subset W$ のいずれかがなりたつことに注意しよう. さて $V_i \cap W = 0$ をみたす V_i の全体を $V_{i_1}, \cdots, V_{i_k}$ とすると $V = W \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}$ となるのである. この証明は命題 2.26 の (3)⇒(1) の証明と同様であるが再記しよう. $W' = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_k}$ とおく. $V \neq W \oplus W'$ であるとして，元 $u \notin W \oplus W'$ をとる. $u = v_1 + \cdots + v_r$, $v_i \in V_i$ とすると，このうちのある v_i は $v_i \notin W \oplus W'$ となる. このとき $V_i \not\subset W \oplus W'$ であるが，V_i は既約であるから $V_i \cap (W \oplus W') = 0$ となる. これより $V_i \cap W = 0$ がわかるので $V_i \subset W'$ となるが，一方 $V_i \cap (W \oplus W') = 0$ より $V_i \cap W' = 0$ でもある. これは矛盾である. よって $V = W \oplus W'$ となる.

命題 2.28 V を完全可約な G-K-加群とし

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, \qquad V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_s'$$

を V の２通りの既約部分 G-K-加群への直和分解とする. このとき

$$r = s$$

であって，かつ $V_1', \cdots, V_s'$ の添数を適当につけかえると

$$V_1 \cong V_1', \ \cdots, \ V_r \cong V_r' \quad (G\text{-}K\text{-同型})$$

にすることができる.

証明 r に関する帰納法で証明する. $r = 1$ のとき $V = V_1$ は既約である. もし $s > 1$ とすると $V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_s'$ は可約となり，V が既約であることに反する. よって $s = 1$ であって，かつ $V_1 = V = V_1'$ となる. 直和因子の個数が $r-1$ のとき命題がなりたつとして，r のときに証明しよう. $s \geqq r$ と仮定しておいてよい. $V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r-1} = W$ とおくとき，補題2.27より

$$V = W \oplus W' \qquad W' \text{ は } V_j' \text{ のいくつかの直和}$$

とすることができる. このとき $W' \cong V/W \cong V_r$ より W' は既約となるので，W' はいずれか１つの V_j' と一致する. いま（番号をつけかえて）$W' = V_s'$ であるとすると

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r-1} \cong V/W' = V/V_s' \cong V_1' \oplus \cdots \oplus V_{s-1}'$$

となる．この（右より左への）G-K-同型対応による $V_1', \cdots, V_{s-1}'$ の W への像をそれぞれ $V_1'', \cdots, V_{s-1}''$ とすると

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{r-1} = V_1'' \oplus \cdots \oplus V_{s-1}'' \qquad V_j'' \cong V_j', \ j = 1, \cdots, s-1$$

となる．これは W の2通りの既約部分 G-K-加群の直和分解を与えている．よって帰納法の仮定より $r-1 = s-1$ であって，$V_1'', \cdots, V_{s-1}''$ の添数を適当につけかえると $V_i \cong V_i''$, $i = 1, \cdots, r-1$ となる．したがって $r = s$ であって，かつ $V_i \cong V_i'$, $i = 1, \cdots, r$ となる．以上で命題が証明された．

(2) コンパクト群の表現と完全可約性

コンパクト群の表現はすべて完全可約であることを示そう．これは，コンパクト群 G の表現を知るためには G の既約表現をすべて調べあげると十分である（十分であるという意味に若干問題あるが）ことを示している．

命題 2.29 G をコンパクト群とするとき，任意の G-K-加群 V は完全可約である．

証明 W を V の部分 G-K-加群とする．V に命題 2.11 (1) の条件をみたす内積を与えておいて

$$W^{\perp} = \{u \in V \mid (u, w) = 0 \ (\text{すべての } w \in W \text{ に対して})\}$$

とおくと，$W^{\perp}$ は V の部分 G-K-加群となる．実際，$x \in G$, $u \in W^{\perp}$ に対して $(xu, w) = (u, x^{-1}w) = 0$, $w \in W$ となるから $xu \in W^{\perp}$ である．そして $V = W \oplus W^{\perp}$ がなりたつ（〔21〕補題 180）．よって V は完全可約である．

例 2.13 $\boldsymbol{Z}$ を整数加群とする．写像 $A: \boldsymbol{Z} \to GL(2, K)$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x \in \boldsymbol{Z}$$

は可約な表現であるが完全可約でない．実際，A が表現であることは容易であるから，完全可約でないことを示そう．ある $P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in GL(2, K)$ に対して $P^{-1}A(x)P = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & b(x) \end{pmatrix}$ となったとする．このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p + xq & r + xs \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & rb \\ qa & sb \end{pmatrix}$$

である．まず $s = sb$ より $s = 0$ または $b = 1$ を得る．$s = 0$ のときには，$\det P \neq 0$ より $q \neq 0$ がわかる．$q = qa$ より $a = 1$ であり，さらに $p + xq = pa$ より $q = 0$ を

得て矛盾となる．$b=1$ のときには $r+xs=rb$ より $s=0$ となるから，前述よりこれもおこり得ない．よって A は完全可約でない．この例では命題2.29がなりたたないが，それは $\boldsymbol{Z}$ がコンパクト(群)でないからである．

(3) Schur の補題

補題2.30 (1) G-K-加群 V, W に対して

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)=\{\rho \mid \rho: V\to W \text{ は } G\text{-}K\text{-準同型写像}\}$$

とおくと，$\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)$[†] は K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ (例1.17) の部分 K-加群になる．

(1)* G の表現 $A: G\to GL(n, K)$, $B: G\to GL(m, K)$ に対して

$$M_{A,B}(m, n, K)=\{P\in M(m, n, K) \mid PA(x)=B(x)P,\ x\in G\}$$

とおくと，$M_{A,B}(m, n, K)$ は K-加群 $M(m, n, K)$ (例1.13) の部分 K-加群になる．V, W に基 $u_1, \cdots, u_n$; $w_1, \cdots, w_m$ をとり，これらの基に関する G の表現をそれぞれ A, B とする．$\rho\in \mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)$ が

$$\rho(u_i)=\sum_{k=1}^{m} w_k p_{ki} \qquad i=1, \cdots, n$$

であるとして，ρ に行列 $P=\left(p_{ki}\right)$ を対応させる写像 $f: \mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)\to M_{A,B}(m, n, K)$, $f(\rho)=P$ は K-同型写像である:

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)\cong M_{A,B}(m, n, K)$$

証明 前半は明らかであるから後半を示そう．まず $\rho\in \mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)$ に対して $P\in M_{A,B}(m, n, K)$ となることを証明しなければならない．$A=\left(a_{ji}\right)$, $B=\left(b_{kl}\right)$ とおくとき，$\rho\in \mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)$, $x\in G$ に対して

$$\rho(xu_i)=\rho\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x)\Big)=\sum_{j} \rho(u_j)a_{ji}(x)=\sum_{k,j} w_k p_{kj} a_{ji}(x)$$

となり，一方

$$\rho(xu_i)=x(\rho(u_i))=x\Big(\sum_{l=1}^{m} w_l p_{li}\Big)=\sum_{l}(xw_l)p_{li}=\sum_{k,l} w_k b_{kl}(x)p_{li}$$

であるから

$$\sum_{j=1}^{n} p_{kj}a_{ji}(x)=\sum_{l=1}^{m} b_{kl}(x)p_{li} \qquad i=1, \cdots n;\ k=1, \cdots, m$$

---

† K-加群 $\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)$ は，G-K-加群 $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ (例2.5) において G の各元 x の作用で不変な元全体のなす部分 K-加群のことである (例1.35):

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V, W)=(\mathrm{Hom}_K(V, W))^G$$

すなわち

$$PA(x) = B(x)P$$

となり，$P \in M_{A,B}(m, n, K)$ が示された．逆に $P = \left(p_{ki}\right) \in M_{A,B}(m, n, K)$ に対して K-準同型写像 $\rho: V \to W$ を

$$\rho(u_i) = \sum_{k=1}^{m} w_k p_{ki} \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたすように定義すると $\rho \in \mathrm{Hom}_{G-K}(V, W)$ であり，P に ρ を対応させる写像 g: $M_{A,B}(m, n, K) \to \mathrm{Hom}_{G-K}(V, W)$, $g(P) = \rho$ が f の逆写像である．f が K-準同型写像であることは明らかであるから，f は K-同型写像である．

補題 2.31 (Schur) （1） V, W を2つの既約 G-K-加群とし，$\rho: V \to W$ を G-K-準同型写像とする．このとき，つぎのいずれかがなりたつ．

（i） $\rho = 0$.

（ii） ρ は G-K-同型写像である．

（1）* $A: G \to GL(n, K)$, $B: G \to GL(m, K)$ を G の2つの既約表現とし，行列 $P \in M(m, n, K)$ が

$$PA(x) = B(x)P \qquad x \in G$$

をみたすとする．このとき，つぎのいずれかがなりたつ．

（i） $P = 0$.

（ii） $n = m$ であって，かつ $\det P \neq 0$.

証明 （1） $\rho \neq 0$ として，ρ が G-K-同型写像であることを示そう．$\rho \neq 0$ ならば，$\mathrm{Im}\,\rho = \rho(V)$ は 0 と異なる W の部分 G-K-加群である．しかるに W は既約であるから $\mathrm{Im}\,\rho = W$ となる．よって ρ は全射である．また $\rho \neq 0$ であるから，$\mathrm{Ker}\,\rho = \rho^{-1}(0)$ は V と異なる V の部分 G-K-加群である．しかるに V は既約であるから $\mathrm{Ker}\,\rho = 0$ となる．よって ρ は単射である．以上で ρ が G-K-同型写像であることが示された．

(1)* は補題 2.30 と (1) の結果である．

つぎの補題も Schur の補題とよばれ，表現論において有用である．

補題 2.32 (Schur) （1） V を既約 G-$\boldsymbol{C}$-加群とする．このとき，G-$\boldsymbol{C}$-準同型写像 $\rho: V \to V$ は恒等写像 $1: V \to V$ の定数倍になる：

$$\rho = 1\alpha \qquad \alpha \in \boldsymbol{C}$$

よって $\mathrm{Hom}_{G\text{-}C}(V,\ V)$[†] は複素数体 $\boldsymbol{C}$ と体として同型である：

$$\mathrm{Hom}_{G\text{-}C}(V,\ V)\cong \boldsymbol{C}$$

（1）* $A: G\to GL(n,\ \boldsymbol{C})$ を G の既約表現とする．行列 $P\in M(n,\ \boldsymbol{C})$ が

$$PA(x)=A(x)P \qquad x\in G$$

をみたすならば，P は単位行列 E の定数倍になる：

$$P=E\alpha \qquad \alpha\in \boldsymbol{C}$$

証明　(1) と (1)* は同じ内容である（補題2.30）から (1)* を示そう．P の固有値[††]の１つを α とすると，条件より

$$(P-E\alpha)A(x)=A(x)(P-E\alpha) \qquad x\in G$$

となる．しかるに α は P の固有値であるから $\det(P-E\alpha)=0$ である．よって補題2.31 (1)* より $P-E\alpha=0$, $P=E\alpha$ となる．

（4）可換群の既約表現

命題2.33　G を可換群とする．

（1） V を既約 G-$\boldsymbol{C}$-加群とすると V は1次元である：$\dim_{\boldsymbol{C}} V=1$.

（1）* $A: G\to GL(n,\ \boldsymbol{C})$ を G の既約表現とすると $n=1$ である．

証明　(1) と (1)* は同じ内容であるから (1)* を示そう．各 $a\in G$ に対して

$$A(a)A(x)=A(ax)=A(xa)=A(x)A(a) \qquad x\in G$$

となるから，Schur の補題2.32 (1)* より

$$A(a)=E\alpha(a) \qquad \alpha(a)\in \boldsymbol{C}$$

となる．したがって，A の次数 n がもし $n>1$ ならば A は可約となるので，A が既約ならば $n=1$ でなければならない．

例2.14　実数体 $\boldsymbol{R}$ では命題2.33はなりたたない．たとえば $\boldsymbol{Z}_3=\{e,\ x,\ x^2\}$ を位数3の可換群とし，写像 $A: \boldsymbol{Z}_3\to GL(2,\ \boldsymbol{R})$ を

$$A(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad A(x)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},\qquad A(x^2)=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

---

† G-K-加群 V に対し $\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V,\ V)$ は K-多元環の構造をもつ．さらに V が既約であるならば $\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V,\ V)$ は可逆 K-多元環（各元 $\rho\in\mathrm{Hom}_{G\text{-}K}(V,\ V)$, $\rho\neq 0$ は逆元 ρ^{-1} をもつ）となる．

†† $\alpha\in K$ が行列 $P\in M(n,K)$ の**固有値**とは $\det(P-E\xi)=0$ の根 $\xi=\alpha$ のことである．複素数体 $\boldsymbol{C}$ は代数的閉体である（10頁）から，複素行列 $P\in M(n,\boldsymbol{C})$ はつねに固有値をもつ．実行列 $P\in M(n,\boldsymbol{R})$ は固有値をもつとは限らない．このことが原因して補題2.32は実数体 $\boldsymbol{R}$ では成立しない．

と定義すると，A は $\boldsymbol{Z}_3$ の既約 $\boldsymbol{R}$ - 表現であるが，A の次数は 2 であって 1 ではない．A が $\boldsymbol{Z}_3$ の表現であることを確かめるのは容易であるから，A が既約であることを示しておこう． ある $P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{R})$ に対して $P^{-1}A(x)P=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & c(x) \end{pmatrix}$ となったとする．このとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q & s \\ -p-q & -r-s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa & pb+rc \\ qa & qb+sc \end{pmatrix}$$

である． 第1列を比較すると $q=pa$, $-p-q=qa$ を得るが，これらより p を消去すると $q(1+a+a^2)=0$ となる． 実数体 $\boldsymbol{R}$ では $1+a+a^2\neq 0$ であるから $q=0$ となる．さらに $-p-q=qa$ より $p=0$ にもなる．しかし，これらは $\det P\neq 0$ に反する．よって A は既約である．

(5) 直交関係

G をコンパクト群とする．G 上で定義された連続関数 $f\colon G\to K$ 全体のつくる K - 加群 $C_K(G)$ (63 頁) において，2つの元 f, g の内積を

$$(f, g)=\int\overline{f(x)}g(x)dx^{\dagger}$$

で定義すると，$C_K(G)$ は内積をもつ K - 加群になる． この内積をもつことを強調するときには，$C_K(G)$ を $L^2C_K(G)$ とかくこともある．また計算の便宜のため，$C_K(G)$ につぎの対称な内積も定義しておく（対称であることは命題 1.68 (8))．

$$\langle f, g\rangle=\int f(x^{-1})g(x)dx$$

$f\in C_K(G)$ が条件 $f(x^{-1})=\overline{f(x)}$ をみたしているならば（あとで述べる指標 χ はこの条件をみたしている）

$$\langle f, g\rangle=(f, g) \qquad g\in C_K(G)$$

となり，2つの内積が一致していることを注意しておく．

補題 2.34 G をコンパクト群とし，$A\colon G\to GL(n, K)$, $B\colon G\to GL(m, K)$ を G の表現とする．このとき行列 $M\in M(n, m, K)$ に対し $P=\int A(x^{-1})MB(x)dx$ とおく

---

† 内積は $(f, g)=\int f(x)\overline{g(x)}dx$ で与える方が普通である．しかし，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ は可換体であるから2つの内積には本質的な差はない．ここでは 14 頁の定義にあわせておいた．

と，Pは

$$PB(x)=A(x)P \qquad x\in G$$

をみたす．

証明　$$A(x)^{-1}PB(x)=A(x^{-1})\left(\int A(y^{-1})MB(y)dy\right)B(x)$$
$$=\int A((yx)^{-1})MB(yx)dy$$
$$=\int A(y^{-1})MB(y)dy\ (\text{命題}\,1.68\,(7))=P$$

より $PB(x)=A(x)P$ となる．

補題 2.35　Gをコンパクト群とし，$A: G\to GL(n, K)$，$B: G\to GL(m, K)$ を同値でない２つの既約表現とする．このとき任意の行列 $M\in M(n, m, K)$ に対して

$$\int A(x^{-1})MB(x)dx=0$$

がなりたつ．

証明　$P=\int A(x^{-1})MB(x)dx$ とおくと

$$PB(x)=A(x)P \qquad x\in G$$

がなりたつ（補題 2.34)．よって Schur の補題 2.31 (1)* より $P=0$ となる．

補題 2.36　Gをコンパクト群とし，$A=\left(a_{ji}\right): G\to GL(n, K)$，$B=\left(b_{lk}\right): G\to GL(m, K)$ を同値でない２つの既約表現とするとき

$$\langle a_{ji}, b_{lk}\rangle=0 \qquad i, j=1, \cdots, n;\ k, l=1, \cdots, m$$

がなりたつ．

証明　行列 $M\in M(n, m, K)$ として $M=E_{il}$ をとると，行列 $P=\int A(x^{-1})MB(x)dx$ は各 (j, k)-成分が $\int a_{ji}(x^{-1})b_{lk}(x)dx=\langle a_{ji}, b_{lk}\rangle$ の行列である．さて $P=0$（補題 2.35）となるから $\langle a_{ji}, b_{lk}\rangle=0$ である．

補題 2.37　Gをコンパクト群とし，$A=\left(a_{ji}\right): G\to GL(n, \boldsymbol{C})$ を既約表現とする．このとき

$$\langle a_{ji}, a_{ij}\rangle=\frac{1}{n} \qquad i, j=1, \cdots, n$$
$$\langle a_{ji}, a_{lk}\rangle=0 \qquad i\neq l \text{ または } j\neq k$$

がなりたつ．

証明 行列 $M \in M(n, \boldsymbol{C})$ に対して $P=\int A(x^{-1})MA(x)dx$ とおくと

$$PA(x) = A(x)P \qquad x \in G$$

がなりたつ (補題2.34). よって Schur の補題2.32(1)* より

$$P = E\alpha \qquad \alpha = \alpha(M) \in \boldsymbol{C}$$

となる. いま $M = E_{il}$ とおくと $P = j\begin{pmatrix} & \overset{k}{\vdots} & \\ \cdots & \langle a_{ji}, a_{lk}\rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha\end{pmatrix}$ であるから

$$j \neq k \quad \text{ならば} \quad \langle a_{ji}, a_{lk}\rangle = 0$$

$$(j = k \quad \text{ならば}) \quad \langle a_{ji}, a_{lj}\rangle = \alpha$$

となる. この α の値を求めるために

$$\int A(x^{-1})E_{il}A(x)dx = E\alpha$$

の両辺のトレース† をとると, 左辺は

$$\operatorname{tr}\left(\int A(x^{-1})E_{il}A(x)dx\right) = \int \operatorname{tr}(A(x)^{-1}E_{il}A(x))dx = \int \operatorname{tr}(E_{il})dx = \int \delta_{il}dx = \delta_{il}$$

となり, 一方右辺は $n\alpha$ であるので $\delta_{il} = n\alpha$, $\alpha = \dfrac{1}{n}\delta_{il}$ となる. よって

$$\langle a_{ji}, a_{lj}\rangle = \frac{1}{n}\delta_{il}$$

を得る. 以上で補題が証明された.

命題 2.38 Gをコンパクト群とし, $A = (a_{ji})$: $G \to U(n) \subset GL(n, \boldsymbol{C})$, $B = (b_{lk})$: $G \to U(m) \subset GL(m, \boldsymbol{C})$ を同値でない2つの既約 (ユニタリ) 表現とするとき

$$(a_{ij}, b_{lk}) = 0 \qquad i, j = 1, \cdots, n;\ k, l = 1, \cdots, m$$

$$\begin{cases} (a_{ij}, a_{ij}) = \dfrac{1}{n} \\ (a_{ij}, a_{i'j'}) = 0 \qquad i \neq i' \quad \text{または} \quad j \neq j' \end{cases}$$

がなりたつ.

証明 各 $x \in G$ に対し $A(x) \in U(n)$ ならば $A(x^{-1}) = {}^t\overline{A(x)}$ であるから, $a_{ji}(x^{-1})$

† 行列 $A = (a_{ji}) \in M(n, K)$ に対し $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ を A の**トレース**というが, これについては指標の節で再び述べる (補題2.41).

$=\overline{a_{ij}(x)}$ となっている．よって $\langle a_{ji}, b_{lk}\rangle=(a_{ij}, b_{lk})$ がなりたつ（107頁）ので，命題は補題2.36, 2.37の結果である．

命題2.39 G をコンパクト群とし

$$A^{(s)}=\left(a_{ji}{}^{(s)}\right): G\to U(n^{(s)}) \qquad s\in S$$

を互いに同値でない既約ユニタリ表現の全体とするとき

$$D_C(G)=\{\sqrt{n^{(s)}}\,a_{ji}{}^{(s)}\,|\,i,\ j=1,\ \cdots,\ n^{(s)},\ s\in S\}$$

は $L^2C_C(G)$ において正規直交系をつくる．

証明　命題2.38の結果である．

実は $D_C(G)$ は $L^2C_C(G)$ において**完全**正規直交 $\boldsymbol{C}$-基であることが知られている(Peter-Weyl)．ここに完全であるとは，連続関数 $f: G\to \boldsymbol{C}$ を任意に与えたとき，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して有限個の $a_1, \cdots, a_m\in D_C(G)$ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_m\in \boldsymbol{C}$ を選んで

$$\int\left|f(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i(x)\right|^2dx<\varepsilon$$

とすることができることである．さらに（$K=\boldsymbol{C}$ のときは上記の結果を含む）つぎの命題がなりたつことも知られている．

命題2.40　(**Peter-Weyl**)　G をコンパクト群とし，$K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ にしたがって

$$A^{(s)}=\left(a_{ji}{}^{(s)}\right): G\to O(n^{(s)});\qquad A^{(s)}=\left(a_{ji}{}^{(s)}\right): G\to U(n^{(s)}) \qquad s\in S$$

をそれぞれ互いに同値でない既約直交表現；既約ユニタリ表現の全体とし

$$D_K(G)=\{a_{ji}{}^{(s)}\,|\,i,\ j=1,\ \cdots,\ n^{(s)},\ s\in S\}$$

とおく．このとき，連続関数 $f: G\to K$ を任意に与えたとき，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し有限個の $a_1, \cdots, a_m\in D_K(G)$ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_m\in K$ を選んで，すべての $x\in G$ に対して

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i(x)\right|<\varepsilon$$

がなりたつようにすることができる．

この命題2.39, 2.40はコンパクト群の上で位相解析学を展開するとき基本的役割を果すのであるが，本書では用いない．したがって命題2.40の証明は与えなかった（証明は〔2〕〔3〕〔4〕〔10〕）．

§3. 表現の指標

(1) 指 標

行列 $A=\left(a_{ji}\right)\in M(n, K)$ に対して， $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ を A の**トレース**（または**跡**）という．

補題2.41 $A, B\in M(n, K)$ に対して，つぎの (1)〜(4) がなりたつ．

(1) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{tr}(A\alpha)=\mathrm{tr}(A)\alpha$ $\alpha\in K$

(2) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

(3) $\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}(A)$ $P\in GL(n, K)$

(4) $\mathrm{tr}({}^tA)=\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(\bar{A})=\overline{\mathrm{tr}(A)}$, $\mathrm{tr}(A^*)=\overline{\mathrm{tr}(A)}$

さらに $A\in M(n, K)$, $B\in M(m, K)$ に対して，つぎの (5) (6) がなりたつ．

(5) $\mathrm{tr}(A\oplus B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ $A\oplus B=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$

(6) $\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$

定義 V を G-K-加群とする．V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，$x\in G$ に対して

$$xu_i=\sum_{j=1}^{n}u_ja_{ji}(x) \qquad i=1, \cdots, n$$

であるとして，関数 $\chi_V: G\to K$ を

$$\chi_V(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)$$

と定義し，χ_V を V の **指 標** という．なお G-K-加群 0 の指標 χ は $\chi=0$ と定義する．

定 義* 表現 $A: G\to GL(n, K)$ に対して，関数 $\chi_A: G\to K$ を

$$\chi_A(x)=\mathrm{tr}(A(x))$$

と定義し，χ_A を A の **指 標** という．

G-K-加群 V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とするとき，V の指標 χ_V は A の指標 χ_A のことにほかならない．このことは，V の指標 χ_V の定義は V の基のとり方によらないことを示している．実際，V にもう1つの基 $v_1, \cdots, v_n$ をとり，この基に関する G の表現を B とすると

$$B(x)=P^{-1}A(x)P \qquad P\in GL(n, K),\ x\in G$$

の関係にある (81 頁) ので，$\mathrm{tr}(B(x))=\mathrm{tr}(P^{-1}A(x)P)=\mathrm{tr}(A(x))$ となるからである．

命題2.42 G-K-加群 V, W とその指標に関して，つぎの (1)〜(4) がなりたつ．

（1） $\chi_V: G \to K$ は連続関数である．

（2） $\chi_V(e)$ (e は G の単位元) は V の次元に等しい：$\chi_V(e) = \dim_K V$.

（3） χ_V は**類関数**である．すなわち任意の $a, x \in G$ に対して

$$\chi_V(a^{-1}xa) = \chi_V(x)$$

がなりたつ．

（4） $V \cong W$ ならば $\chi_V = \chi_W$ である．

証明 (1) は明らかであり，(2) も $eu = u$, $u \in V$ より明らかである．

（3） V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，この基に関する G の表現を A とするとき

$$\chi_V(a^{-1}xa) = \mathrm{tr}\,(A(a^{-1}xa)) = \mathrm{tr}\,(A(a)^{-1}A(x)A(a)) = \mathrm{tr}\,(A(x)) = \chi_V(x)$$

である．

（4） $f: V \to W$ を G-K-同型写像とする． V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり， W には基 $f(u_1), \cdots, f(u_n)$ をとって，これらの基を用いてそれぞれの指標を求めると，明らかに $\chi_V = \chi_W$ である．

命題2.43 G-K-加群 V, W とその指標に関して，つぎの (1)〜(6) がなりたつ．

（1） $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$

（2） $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$ （ただし $(\chi_V \chi_W)(x) = \chi_V(x)\chi_W(x)$ とする (63 頁)）．

（3） $\chi_{\hat{V}} = \hat{\chi}_V$ （ただし $\hat{\chi}_V(x) = \chi_V(x^{-1})$ とする）．

（4） V を G-$\boldsymbol{C}$-加群とするとき，$\chi_{\bar{V}} = \bar{\chi}_V$ がなりたつ．

（5） V を G-$\boldsymbol{R}$-加群とするとき，$\chi_{V^C} = \chi_V$ がなりたつ．

（6） G' も位相群とし， $h: G' \to G$ を連続な群準同型写像とするとき $\chi_{h^*(V)} = h^*\chi_V$ がなりたつ．（ただし $(h^*\chi_V)(x) = \chi_V(h(x))$ とする）．

証明 いずれも明らかであるが，念のために (3) を証明しておこう． V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，その基に関する G の表現を A とするとき

$$\chi_{\hat{V}}(x) = \chi_{\hat{A}}(x) = \mathrm{tr}\,(\hat{A}(x)) = \mathrm{tr}({}^tA(x^{-1})) = \mathrm{tr}\,(A(x^{-1})) = \chi_V(x^{-1}) = \hat{\chi}_V(x)$$

である．

命題2.44 G をコンパクト群とする．

（1） G-$\boldsymbol{R}$-加群 V に対して $\chi_{\hat{V}} = \chi_V$ がなりたつ．

（2） G-$\boldsymbol{C}$-加群 V に対して $\chi_{\hat{V}} = \chi_{\bar{V}}$ がなりたつ．

証明 V のある基に関する G の表現を A とする．

（1） $A(x)\in O(n)$, $x\in G$ としてよい（命題2.11 (1)* (i)）から，$\hat{A}(x)={}^tA(x^{-1})=A(x)$ である．よって $\chi_{\hat{V}}(x)=\mathrm{tr}\,(\hat{A}(x))=\mathrm{tr}\,(A(x))=\chi_V(x)$ である．

（2） $A(x)\in U(n)$, $x\in G$ としてよい（命題2.11 (1)* (ii)）から，$\hat{A}(x)={}^tA(x^{-1})=\overline{A(x)}$ である．よって $\chi_{\hat{V}}(x)=\mathrm{tr}\,(\hat{A}(x))=\mathrm{tr}\,(\overline{A(x)})=\mathrm{tr}\,(\bar{A}(x))=\chi_{\bar{V}}(x)$（補題2.9）である．

（2） 指標による特徴づけ

コンパクト群の表現はその指標によって完全に決定される（命題2.47）ことを示そう．

命題2.45 G をコンパクト群とする．このとき G-K-加群 V とその指標 χ_V に関して，つぎの (1)〜(4) がなりたつ．

（1） V を既約 G-$\boldsymbol{C}$-加群とすると $(\chi_V,\chi_V)=1$ である．

（2） V, W を G-K-同型でない2つの既約 G-K-加群とすると $(\chi_V,\chi_W)=0$ である．

（3） V を 0 と異なる G-K-加群とすると $(\chi_V,\chi_V)\geqq 1$ である．なお (χ_V,χ_V) の値は整数である．

（4） G-K-加群 V に対して，$(\chi_V,\chi_V)=1$ ならば V は既約である．

証明 V, W に適当な基を選んで，その基に関する G の表現がそれぞれ $A(x)=\left(a_{ji}(x)\right)\in O(n)$; $U(n)$, $B(x)=\left(b_{lk}(x)\right)\in O(m)$; $U(m)$ であるようにしておく（命題2.11 (1)*）．

（1） $(\chi_V,\chi_V)=(\sum_{i=1}^n a_{ii},\sum_{j=1}^n a_{jj})=\sum_{i,j}(a_{ii},a_{jj})=\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{n}$（命題2.38）$=1$

（2） $(\chi_V,\chi_W)=(\sum_{i=1}^n a_{ii},\sum_{k=1}^m b_{kk})=\sum_{i,k}(a_{ii},b_{kk})=\sum_{i,k}\langle a_{ii},b_{kk}\rangle=0$（命題2.36）．

（3） V が G-$\boldsymbol{R}$-加群のときには $\chi_V=\chi_{V^C}$（命題2.43 (5)）であるから，V を G-$\boldsymbol{C}$-加群として証明してよい．さて V は完全可約である（命題2.29）から，V を既約部分 G-$\boldsymbol{C}$-加群 V_i の直和

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$$

に分解する（命題2.26）と，$\chi_V=\chi_1+\cdots+\chi_r$（$\chi_{V_i}$ を χ_i とかいた）となる（命題2.43 (1)）．(1) (2) より $(\chi_i,\chi_j)=0$ または 1 であるから $(\chi_V,\chi_V)=(\sum_{i=1}^r\chi_i,\sum_{j=1}^r\chi_j)=\sum_{i,j}(\chi_i,\chi_j)\geqq r>0$ であって，しかも (χ_V,χ_V) の値は整数である．

（4） (3) の記号をそのまま用いる．V が可約 G-$\boldsymbol{C}$-加群ならば (3) より $(\chi_V,\chi_V)\geqq r\geqq 2$ となる．これは $(\chi_V,\chi_V)=1$ の仮定に反する．よって V は既約である．V が

G-$\boldsymbol{R}$-加群のときには V^C を考えると $\chi_{V^C}=\chi_V$ であるから，$(\chi_{V^C},\chi_{V^C})=(\chi_V,\chi_V)=1$ となる．よって V^C は既約であり，したがって V も既約である．

命題 2.46 Gをコンパクト群とする．χ_i, $i\in I$ を既約 K-指標[†]の全体とすると，これらは（これらの任意の有限個は，の意味）$C_K(G)$ において K-1 次独立である．

証明
$$\alpha_1\chi_1+\cdots+\alpha_n\chi_n=0 \qquad \alpha_i\in K$$
とするとき
$$0=(\chi_i,0)=(\chi_i,\sum_{j=1}^n\alpha_j\chi_j)=\sum_{j=1}^n(\chi_i,\chi_j)\alpha_j=(\chi_i,\chi_i)\alpha_i\ (\text{命題}\,2.45\,(2))$$
となる．しかるに $(\chi_i,\chi_i)\neq 0$（命題 2.45 (3)）であるから，$\alpha_i=0$, $i=1,\cdots,n$ となる．よって任意の n に対して $\chi_1,\cdots,\chi_n$ は K-1 次独立である．

以上のことを用いると，つぎの重要な命題を証明することができる．

命題 2.47 Gをコンパクト群とする．このとき G-K-加群 V, W に対して
$$V\cong W \iff \chi_V=\chi_W$$
がなりたつ．

証明 $\Rightarrow$ は既に証明した（命題 2.42 (4)）．$\Leftarrow$ を示そう．V, W は完全可約である（命題 2.29）から，それぞれを既約 G-K-加群の直和に分解する．
$$V\cong n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_rV_r{}^{\dagger\dagger},\qquad W\cong m_1V_1\oplus\cdots\oplus m_rV_r \qquad n_i, m_i\geqq 0$$
ここに V_i は既約 G-K-加群であって，$i\neq j$ ならば $V_i\not\cong V_j$ とするとしておく．さて，このとき
$$n_1\chi_{V_1}+\cdots+n_r\chi_{V_r}=\chi_V=\chi_W=m_1\chi_{V_1}+\cdots+m_r\chi_{V_r}$$
となる．しかるに $\chi_{V_1},\cdots,\chi_{V_r}$ は K-1 次独立である（命題 2.46）から
$$n_i=m_i \qquad i=1,\cdots,r$$
を得る．よって $V\cong W$ である．

注意 Gをコンパクト群とする．VをG-K-加群とし
$$V\cong n_1V_1\oplus\cdots\oplus n_rV_r,\qquad V\cong m_1V_1\oplus\cdots\oplus m_rV_r \qquad n_i, m_i\geqq 0$$
を V の 2 通りの既約 G-K-加群への直和分解とするとき，命題 2.47 の証明において $V=W$ の特別の場合とみると
$$n_i=m_i \qquad i=1,\cdots,r$$

[†] $\chi\in C_K(G)$ がある既約 G-K-加群の指標となっているとき，χ を**既約 K-指標**という．

[††] 記号 nV_i は V_i の n 個の直和 $V_i\oplus\cdots\oplus V_i$ を意味し，$n=0$ のときは nV_i は 0 を意味するものとする．

を得る．これは V の既約 G-K-加群への直和分解の1意性（ただし G-K-同型を除く）を示している（命題2.28参照）．

§4. 直積群の表現

コンパクト群 G_1, G_2 の直積群 $G_1\times G_2$ の $\boldsymbol{C}$-表現は G_1, G_2 の $\boldsymbol{C}$-表現から完全に定まることを示そう．以下 G_1, G_2 は位相群を表わすものとする．

定義 V_1 を G_1-K-加群，V_2 を G_2-K-加群とする．V_1 と V_2 の K-加群としてのテンソル積 $V_1\otimes_K V_2$ において $(x_1, x_2)\in G_1\times G_2$ の作用を

$$(x_1, x_2)(u_1\otimes u_2)=x_1u_1\otimes x_2u_2 \qquad u_1\in V_1,\ u_2\in V_2$$

と定義すると $V_1\otimes_K V_2$ は $G_1\times G_2$-K-加群になる．この $G_1\times G_2$-K-加群を $V_1\times V_2$ で表わし，V_1 と V_2 の **直積 $G_1\times G_2$-K-加群** という．

定義* $A_1: G_1\to GL(n_1, K)$, $A_2: G_2\to GL(n_2, K)$ をそれぞれ G_1, G_2 の表現とする．写像 $A_1\times A_2: G_1\times G_2\to GL(n_1n_2, K)$ を

$$(A_1\times A_2)(x_1, x_2)=A_1(x_1)\otimes A_2(x_2)$$

と定義すると $A_1\times A_2$ は $G_1\times G_2$ の表現になる．この表現 $A_1\times A_2$ を A_1 と A_2 の **直積表現** という．

補題2.48 V_1 を G_1-K-加群，V_2 を G_2-K-加群とする．V_1, V_2 に基 $u_1, \cdots, u_{n_1}$; $v_1, \cdots, v_{n_2}$ をとり，それらの基に関する G_1, G_2 の表現をそれぞれ A_1, A_2 とする．このとき $V_1\times V_2$ の基

$$u_1\otimes v_1,\ u_2\otimes v_1,\ \cdots,\ u_{n_1}\otimes v_1,\ u_1\otimes v_2,\ \cdots,\ u_{n_1}\otimes v_2,\ \cdots,\ \cdots,\ u_{n_1}\otimes v_{n_2}$$

（補題1.10）に関する $G_1\times G_2$ の表現が $A_1\times A_2$ である．

証明 $x_1u_i=\sum_k u_k a_{ki}^{(1)}(x_1)\quad x_1\in G_1,\qquad x_2v_j=\sum_l v_l a_{lj}^{(2)}(x_2)\quad x_2\in G_2$

とするとき

$$(x_1, x_2)(u_i\otimes v_j)=x_1u_i\otimes x_2v_j=\sum_k u_k a_{ki}^{(1)}(x_1)\otimes\sum_l v_l a_{lj}^{(2)}(x_2)$$

$$=\sum_{k,l}(u_k\otimes v_l)a_{ki}^{(1)}(x_1)a_{lj}^{(2)}(x_2)$$

となるからである．

補題2.49 V_1 を G_1-K-加群，V_2 を G_2-K-加群とするとき，指標に関して

$$\chi_{V_1\times V_2}(x_1, x_2)=\chi_{V_1}(x_1)\chi_{V_2}(x_2) \qquad x_1\in G_1,\ x_2\in G_2$$

がなりたつ．

証明　V_1, V_2 の適当な基に関する G_1, G_2 の表現をそれぞれ A_1, A_2 とするとき

$$\chi_{V_1\times V_2}(x_1, x_2) = \mathrm{tr}\,((A_1 \times A_2)(x_1, x_2))\ (\text{補題 } 2.48) = \mathrm{tr}\,(A_1(x_1) \otimes A_2(x_2))$$
$$= \mathrm{tr}\,(A_1(x_1))\,\mathrm{tr}\,(A_2(x_2))\ (\text{補題 } 2.41\,(6)) = \chi_{V_1}(x_1)\chi_{V_2}(x_2)$$

となる.

補題 2.50　G_1, G_2 をコンパクト群とし, V_1, W_1 を G_1-K-加群, V_2, W_2 を G_2-K-加群とする. このとき指標の内積に関して

$$(\chi_{V_1\times V_2}, \chi_{W_1\times W_2}) = (\chi_{V_1}, \chi_{W_1})(\chi_{V_2}, \chi_{W_2})$$

がなりたつ.

証明

$$(\chi_{V_1\times V_2}, \chi_{W_1\times W_2}) = \iint \overline{\chi_{V_1\times V_2}(x_1, x_2)}\chi_{W_1\times W_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$
$$= \iint \overline{\chi_{V_1}(x_1)\chi_{V_2}(x_2)}\chi_{W_1}(x_1)\chi_{W_2}(x_2)dx_1dx_2\ (\text{補題 } 2.49)$$
$$= \left(\int \overline{\chi_{V_1}(x_1)}\chi_{W_1}(x_1)dx_1\right)\left(\int \overline{\chi_{V_2}(x_2)}\chi_{W_2}(x_2)dx_2\right)\ (\text{命題 } 1.70)$$
$$= (\chi_{V_1}, \chi_{W_1})(\chi_{V_2}, \chi_{W_2})$$

命題 2.51　G_1, G_2 をコンパクト群とする. このとき G_1-$\boldsymbol{C}$-加群 V_1 と G_2-$\boldsymbol{C}$-加群 V_2 に対して

$$V_1, V_2 \text{がともに既約} \iff V_1 \times V_2 \text{が既約}$$

がなりたつ.

証明　V_1, V_2 が既約であるとすると $(\chi_{V_1}, \chi_{V_1}) = (\chi_{V_2}, \chi_{V_2}) = 1$ である (命題 2.45 (1)). したがって $(\chi_{V_1\times V_2}, \chi_{V_1\times V_2}) = (\chi_{V_1}, \chi_{V_1})(\chi_{V_2}, \chi_{V_2})$ (補題 2.50) $= 1 \times 1 = 1$ となる. よって $V_1 \times V_2$ は既約である (命題 2.45 (4)). 逆は上記のことを逆にたどるとよい.

この命題 2.51 より, G_1, G_2 の既約 $\boldsymbol{C}$-表現の直積表現をつくると $G_1 \times G_2$ の既約 $\boldsymbol{C}$-表現が生ずることがわかったが, 逆にこの方法で $G_1 \times G_2$ の既約 $\boldsymbol{C}$-表現がすべてつくされることを示そう.

補題† 2.52　G_1, G_2 をコンパクト群とする.

(1)　V を既約 $G_1 \times G_2$-K-加群とする. V において $x_1 \in G_1$ の作用を

$$x_1 u = (x_1, e_2)u \qquad u \in V,\ e_2 \text{ は } G_2 \text{ の単位元}$$

と定義すると V は G_1-K-加群になる. この G_1-K-加群 V は完全可約である (命題 2.29) から

† 補題 2.52 において, G_2 がコンパクト(群)であるという仮定は不要である.

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \qquad V_i \text{ は既約 } G_1\text{-}K\text{-加群}$$

と直和分解するとき

$$V_1 \cong \cdots \cong V_r \quad (G_1\text{-}K\text{-同型})$$

となる.

(1)* $A: G_1 \times G_2 \to GL(n, K)$ を $G_1 \times G_2$ の既約表現とする. G_1 の表現 $B: G_1 \to GL(n, K)$ を

$$B(x_1) = A(x_1, e_2) \qquad e_2 \text{ は } G_2 \text{ の単位元}$$

と定義するとき, G_1 の既約表現 $A_1: G_1 \to GL(n, K)$ が存在して

$$B \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_1$$

となる.

証明 (1) と (1)* は同じ内容であるから (1)* を証明しよう. G_1 の表現 B は完全可約であるから, つぎのような直和分解が存在する.

$$B \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_1 \oplus A_{r+1} \oplus \cdots \oplus A_s$$

ここに $A_1, A_{r+1}, \cdots, A_s$ は G_1 の既約表現であって, A_1 は $A_{r+1}, \cdots, A_s$ のいずれとも同値でないとしておく. 実は $A_{r+1}, \cdots, A_s$ が現われないのであるが現われたとしよう. なお $B \cong$ を $B =$ として証明してよい. さて $C: G_2 \to GL(n, K)$ を

$$C(x_2) = A(e_1, x_2) \qquad e_1 \text{ は } G_1 \text{ の単位元}$$

と定義すると, すべての $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ に対して

$$B(x_1)C(x_2) = A(x_1, e_2)A(e_1, x_2) = A(x_1, x_2) = A(e_1, x_2)A(x_1, e_2) = C(x_2)B(x_1)$$

がなりたつ. したがって $C = \left(C_{ji}\right)$ (ここに C_{ji} はつぎの行列の計算ができるように, $A_1, A_{r+1}, \cdots, A_s$ の次数に応じて区分けした行列である) とおき

$$\begin{pmatrix} A_1(x_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_1(x_1) & & \\ & & & A_{r+1}(x_1) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_s(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(x_2) & \cdots & C_{1s}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1}(x_2) & \cdots & C_{ss}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x_2) & \cdots & C_{1s}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1}(x_2) & \cdots & C_{ss}(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_1(x_1) & & \\ & & & A_{r+1}(x_1) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_s(x_1) \end{pmatrix}$$

を計算して成分を比較すると

$$A_1(x_1)C_{jk}(x_2) = C_{jk}(x_2)A_k(x_1) \qquad j = 1, \cdots, r;\ k = r+1, \cdots, s$$

$$A_k(x_1)C_{ki}(x_2) = C_{ki}(x_2)A_1(x_1) \qquad k = r+1, \cdots, s;\ i = 1, \cdots, r$$

がなりたつ. $x_2 \in G_2$ を固定して考えるとき, A_1 は $A_{r+1}, \cdots, A_s$ と同値でないから,

Schur の補題 2.31 (1)* より $C_{jk}(x_2)=0,\ C_{ki}(x_2)=0$, すなわち $C=\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ の形となる．このとき

$$A(x_1, x_2)=B(x_1)C(x_2)=\left(\begin{array}{cc|c} A_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ & A_1 & \\ \hline & 0 & * \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

の形となり，A が既約であるという仮定に反する．よって $B=A_1\oplus\cdots\oplus A_1$ となる．

命題 2.53　G_1, G_2 をコンパクト群とする．任意の既約 $G_1\times G_2$-$\boldsymbol{C}$-加群 V は，ある既約 G_1-$\boldsymbol{C}$-加群 V_1 と既約 G_2-$\boldsymbol{C}$-加群 V_2 を用いて

$$V\cong V_1\times V_2 \qquad (G_1\times G_2\text{-}\boldsymbol{C}\text{-同型})$$

と表わされる．

証明　命題の内容を表現にかき直して証明しよう．A を $G_1\times G_2$ の既約 $\boldsymbol{C}$-表現とする． 補題 2.52 (1)* と同様に $B(x_1)=A(x_1, e_2)$, $C(x_2)=A(e_1, x_2)$ とおいて，それぞれ G_1, G_2 の表現 B, C をつくる．このとき

$$B\cong A_1\oplus\cdots\oplus A_1 \qquad A_1 \text{ は } G_1 \text{ の既約 } \boldsymbol{C}\text{-表現}$$

となっていた (補題 2.52 (1)*)．なお $B\cong$ を $B=$ として証明してよい．さて

$$B(x_1)C(x_2)=A(x_1, x_2)=C(x_2)B(x_1) \qquad x_1\in G_1,\ x_2\in G_2$$

であるから，$C=\left(C_{ji}\right)$ (C_{ji} は A_1 と同じ次数の行列) とおき

$$\begin{pmatrix} A_1(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A_1(x_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11}(x_2) & \cdots & C_{1r}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1}(x_2) & \cdots & C_{rr}(x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{11}(x_2) & \cdots & C_{1r}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1}(x_2) & \cdots & C_{rr}(x_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A_1(x_1)\end{pmatrix}$$

を計算して成分を比較すると

$$A_1(x_1)C_{ji}(x_2)=C_{ji}(x_2)A_1(x_1) \qquad i, j=1, \cdots, r$$

を得る．しかるに A_1 は既約であるから，Schur の補題 2.32 (1)* より

$$C_{ji}(x_2)=Ec_{ji}(x_2) \qquad c_{ji}(x_2)\in\boldsymbol{C}$$

となる．$A_2(x_2)=\left(c_{ji}(x_2)\right)$ とおくと

$$A(x_1, x_2)=B(x_1)C(x_2)=\left(A_1(x_1)c_{ji}(x_2)\right)=A_1(x_1)\otimes A_2(x_2) \qquad (\mathrm{i})$$

となるので $A=A_1\times A_2$ を得る．なお A が既約表現であるから，A_2 は表現であって (A_2

が（連続性を含めて）表現であることは（i）式において $x_1 = e_1$ とおくとわかる），かつ既約である（命題2.51）．

以上の諸結果をあわせると，本節の目的であるつぎの命題を得る．

命題2.54　G_1, G_2 をコンパクト群とする．

$$V_i^{(1)} \quad i \in I, \qquad V_j^{(2)} \quad j \in J$$

をそれぞれ互いに同値でない既約 G_1 - $\boldsymbol{C}$ - 加群，既約 G_2 - $\boldsymbol{C}$ - 加群の全体とすれば

$$V_i^{(1)} \times V_j^{(2)} \qquad (i, j) \in I \times J$$

は互いに同値でない既約 $G_1 \times G_2$ - $\boldsymbol{C}$ - 加群の全体となる．

証明　命題2.51と2.53の結果である．$V_i^{(1)} \times V_j^{(2)}, (i, j) \in I \times J$ のいずれの2つも同値でないことの証明はつぎのようにするとよい．$V_i^{(1)} \times V_j^{(2)} \cong V_{i'}^{(1)} \times V_{j'}^{(2)}$ とすると，$1 = (\chi_{V_i^{(1)} \times V_j^{(2)}}, \chi_{V_{i'}^{(1)} \times V_{j'}^{(2)}})$（命題2.45(1)）$= (\chi_{V_i^{(1)}}, \chi_{V_{i'}^{(1)}})(\chi_{V_j^{(2)}}, \chi_{V_{j'}^{(2)}})$（補題2.50）より $(\chi_{V_i^{(1)}}, \chi_{V_{i'}^{(1)}}) = 1, (\chi_{V_j^{(2)}}, \chi_{V_{j'}^{(2)}}) = 1$ となる．よって $V_i^{(1)} \cong V_{i'}^{(1)}, V_j^{(2)} \cong V_{j'}^{(2)}$ である（命題2.45(2)）．

§5. 多元環の表現

(1) A-K-多元環

定義　A を K - 多元環とする．有限次元 K - 加群 V の任意の元 u と A の任意の元 x に対して V の元 xu が1意に定まり，つぎの条件

（1）　$x(u + v) = xu + xv$

（2）　$x(u\alpha) = (xu)\alpha = (x\alpha)u \qquad x, y \in A,\ u, v \in V,\ \alpha \in K$

（3）　$x(yu) = (xy)u$

（A が単位元1をもつときには $1u = u$ も要求する）．

（4）　$(x + y)u = xu + yu$

（さらに A に位相が導入されていて A における各算法が連続であるときには，V のある基 $u_1, \cdots, u_n$ に対して $xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x)$ とおくとき，各写像 $a_{ji}: A \to K$ が連続であることを要求する）がなりたつとき，V を **A-K-加群** という．

例2.15　有限次元 K - 多元環 A は A - K - 加群である．特に Clifford K - 多元環 $C(K_-{}^n)$ は $C(K_-{}^n)$ - K - 加群である．

A - K - 加群についても G - K - 加群と同様な定義と命題がなりたつ．たとえば2つの A - K - 加群の直和，既約 A - K - 加群，また A - K - 加群が完全可約であることなどが

定義でき，しかも命題2.26と同様につぎの補題がなりたつ.

補題2.55　A を K-多元環とする. 0と異なる A-K-加群 V に対して，つぎの3つの条件は同値である.

（1）　V は完全可約である.

（2）　V は既約部分 A-K-加群 V_i の直和である：

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

（3）　V は既約部分 A-K-加群 V_i, $i \in I$ の和である：

$$V = \sum_{i \in I} V_i$$

（2）　$M(n, K)$-K-加群

$M(n, K)$ は単位元 E をもつ K-多元環であった（例1.20）. 任意の $M(n, K)$-K-加群は完全可約であり，しかも非常に簡単な構造になっているのである. このことについて述べよう.

補題2.56　$M(n, K)$ において，第 i 列ベクトル以外の各列ベクトルが0である行列全体を L_i とする：

$$L_i = \{X \in M(n, K) \mid X = (0, \cdots, 0, \overset{i}{x}, 0, \cdots, 0),\ x \in K^n\} = M(n, K)E_i$$

このとき L_i, $i = 1, \cdots, n$ は互いに $M(n, K)$-K-同型：$L_1 \cong \cdots \cong L_n$ な n 次元既約 $M(n, K)$-K-加群であって

$$M(n, K) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$$

となる.

証明　各 L_i が $M(n, K)$ の n 次元部分 $M(n, K)$-K-加群であって，かつ直和 $M(n, K) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ となっていることは明らかである. L_i が既約であることを示そう. L_i の部分 $M(n, K)$-K-加群 $\mathfrak{l}_i$ が0と異なる元 $X = \sum_{j=1}^{n} E_{ji} x_{ji}$, $x_{ji} \in K$ を含んでいたとする. $x_{ji} \neq 0$ $(i \neq j)$ とすると，X の左から E_{ij} を掛けると $E_{ij}X = E_{ii}x_{ji} \in \mathfrak{l}_i$ となるが，$x_{ji} \neq 0$ であるから $E_i \in \mathfrak{l}_i$ となる. $i \neq j$ ならばつねに $x_{ji} = 0$ であるとすると，$X = E_i x_{ii} \in \mathfrak{l}_i$, $x_{ii} \neq 0$ より $E_i \in \mathfrak{l}_i$ となる. 結局いずれの場合にも $E_i \in \mathfrak{l}_i$ となる. したがって $L_i = M(n, K)E_i \subset \mathfrak{l}_i$ となり，$L_i = \mathfrak{l}_i$ を得る. よって L_i は既約である. 最後に，L_i と L_k が $M(n, K)$-K-同型であることは，写像 $f: L_i \to L_k$,

$$f(0, \cdots, 0, \overset{i}{x}, 0, \cdots, 0) = (0, \cdots, 0, \overset{k}{x}, 0, \cdots, 0)$$

が $M(n, K)$-K-加群の同型を与えているからである.

この補題を用いて，この補題よりもっと一般なつぎの命題がなりたつことを示そう．

命題 2.57 既約 $M(n, K)$ - K - 加群 L は n 次元であって，L は $M(n, K)$ - K - 同型を除いて1意に定まる．また任意の $M(n, K)$ - K - 加群 V は完全可約である．したがって V は

$$V \cong L \oplus \cdots \oplus L \qquad (M(n, K)\text{-}K\text{-同型})$$

となる．

証明 $M(n, K) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$（補題 2.56）であるから

$$V = M(n, K)V = \sum_{u \in V} M(n, K)u = \sum_{u, i} L_i u$$

となる．右辺において $L_i u = 0$ ならば除いておくことにする．さて $L_i u$ は L_i に $M(n, K)$ - K - 同型な既約 $M(n, K)$ - K - 加群である．実際，写像 $f: L_i \to L_i u$ を $f(X) = Xu$ と定義すると f は全射 $M(n, K)$ - K - 準同型写像である．$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ は L_i の部分 $M(n, K)$ - K - 加群であり，かつ $\operatorname{Ker} f \neq L_i$ であるから，L_i が既約のことより $\operatorname{Ker} f = 0$ となる．よって f は単射である．以上で $L_i u \cong L_i$ が示された．なお，これらの L_i は互いに $M(n, K)$ - K - 同型である（補題 2.56）ので，それらの1つを L とすると $L_i u \cong L$ となる．さて

$$V = \sum_{u, i} L_i u \qquad L_i u \text{ は既約 } M(n, K)\text{-}K\text{-加群} \tag{i}$$

となったから V は完全可約であり，V は

$$V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \qquad V_j \text{ は既約 } M(n, K)\text{-}K\text{-加群} \tag{ii}$$

となる（補題 2.55）．特に V 自身が既約ならば，（i）よりある i と $u \in V$ に対して $V \cong L_i u$，したがって $V \cong L$ となるので，既約 $M(n, K)$ - K - 加群はつねに L に $M(n, K)$ - K - 同型であることがわかった．だから（ii）をかき直すと，一般の $M(n, K)$ - K - 加群 V は

$$V \cong L \oplus \cdots \oplus L$$

となる．

（3） $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 加群

K - 多元環 $M(n, K)$ の直和 K - 多元環 $M(n, K) \oplus M(n, K)$ を考えよう．$M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 加群に対しては，つぎの補題と命題がなりたつ．証明はいずれも補題 2.56，命題 2.57 と同じようにするとよい．

補題 2.58 $M(n, K) \oplus M(n, K)$ において，それぞれ第 i 列，第 $n+i$ 列を除いた

各列ベクトルが $\mathbf{0}$ である元全体を L_i^+, L_i^- とする：

$$L_i^+ = \{X \in M(n, K) \oplus M(n, K) \mid X = (\mathbf{0}, \cdots, \overset{i}{\boldsymbol{x}}, \cdots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})\}$$

$$L_i^- = \{X \in M(n, K) \oplus M(n, K) \mid X = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \overset{n+i}{\boldsymbol{x}}, \cdots, \mathbf{0})\}$$

このとき L_i^+, L_i^-, $i = 1, \cdots, n$ は n 次元既約 $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 加群であり，$L_1^+, \cdots, L_n^+$ 同志，$L_1^-, \cdots, L_n^-$ 同志は互いに $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 同型であり，L_i^+ と L_j^- は $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 同型でない．かつ

$$M(n, K) \oplus M(n, K) = (L_1^+ \oplus \cdots \oplus L_n^+) \oplus (L_1^- \oplus \cdots \oplus L_n^-)$$

となる．

命題 2.59　既約 $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 加群は，同型を除くと 2 つあって，しかも 2 つに限る．それらを L^+, L^- とすると，L^+, L^- はともに n 次元である．また任意の $M(n, K) \oplus M(n, K)$ - K - 加群 V は完全可約である．したがって

$$\begin{aligned} V &\cong (L^+ \oplus \cdots \oplus L^+) \oplus (L^- \oplus \cdots \oplus L^-) \\ &= kL^+ \oplus mL^- \qquad k \geqq 0,\ m \geqq 0 \end{aligned}$$

となる．

3 表 現 環

2章で得た主要な結果を要約するとつぎの (1) (2) である.

(1) コンパクト群 G の表現はその指標により決定される (命題2.47).

(2) 指標は類関数である: $\chi(a^{-1}xa)=\chi(x)$ (命題2.42(3)).

したがって G の表現を調べるためには, G に

$$x \sim y \Leftrightarrow y=a^{-1}xa \text{ となる } a \in G \text{ が存在する}$$

の同値関係を与えて, 等化集合 $G/\sim$ の構造を調べる必要が起る. G が弧状連結なコンパクト Lie 群であるときには, $G/\sim$ の代表系として極大トーラス T を選ぶことができる. しかし T のなかにも同値な元があるので, それらを同一視する変換群として Weyl 群が生じるのである.

さて本章では, 位相群 G の表現環 $R_K(G)$ を定義し, トーラス T の複素表現環 $R(T)$ を決定しよう. また G の極大トーラス T と Weyl 群 $W(G)$ を定義して, 群 $W(G)$ が環 $R(T)$ に働いていることを示す. 与えられた群 G の複素表現環 $R(G)$ を具体的に求めるには, この $W(G)$ と $R(T)$ が主役を演ずることになる.

なお G で位相群を表わし, K で体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ のいずれか1つを表わすのは1, 2章と同じである.

§1. 表 現 環

(1) 表現環と指標環

定義 G-K-加群 V の G-K-同型類 $[V]$ 全体の集合を $M_K(G)$ で表わす. (G-K-同型な G-K-加群はすべて同じとみて $[V]$ を単に V とかくこともある). $M_K(G)$ は直和とテンソル積

$$[V]\oplus[W]=[V\oplus W] \qquad [V]\otimes[W]=[V\otimes W]$$

に関して単位元 $[K]$ をもつ可換半環をつくる (命題2.5). $K=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ にしたがって, $M_K(G)$ をそれぞれ $MO(G)$, $M(G)$ とかくことにする. さて, この可換半環 $M_K(G)$ の普遍環を $(R_K(G), \phi_G)$ で表わし, $R_K(G)$ を G の体 K の上の**表現環**という. $K=\boldsymbol{R}$ のときには $R_{\boldsymbol{R}}(G)$ を $RO(G)$ で表わし, G の**実表現環**という. $K=\boldsymbol{C}$ のときには

$R_C(G)$ を $R(G)$ で表わし，G の**複素表現環**という．

定義　G 上で定義された連続関数 $f\colon G\to K$ 全体のつくる可換環 $C_K(G)$（63頁）において，G の K－指標 χ_V 全体より生成される部分環を $ch_K(G)$ で表わし，$ch_K(G)$ を G の **K－指標環**という．$ch_C(G)$ を単に $ch(G)$ とかくことが多い．指標には $\chi_V\chi_W=\chi_{V\otimes W}$（命題2.43(2)）の関係があるので，$ch_K(G)$ の定義を，$C_K(G)$ において G の K－指標 χ_V 全体より生成される部分加群としておいても，$ch_K(G)$ は $C_K(G)$ の部分環になっている．

G がコンパクト群であれば，G の K－表現は完全可約である（命題2.29）から，G の K－指標 χ は既約 K－指標 χ_i を用いて有限和

$$\chi=\sum_i m_i\chi_i \qquad m_i>0,\ m_i\in\boldsymbol{Z}$$

と表わされる．したがって $ch_K(G)$ の元 χ は有限和

$$\chi=\sum_i m_i\chi_i \qquad m_i\in\boldsymbol{Z},\ \chi_i \text{ は既約 } K\text{－指標}$$

と1意に（命題2.46）表わせる．すなわち $ch_K(G)$ は G の各既約 K－指標を基とする自由加群である．

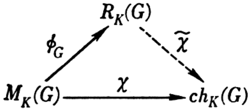
命題3.1　コンパクト群 G に対して，つぎの（1）（2）がなりたつ．

（1）　表現環 $R_K(G)$ は K－指標環 $ch_K(G)$ に環同型である：$R_K(G)\cong ch_K(G)$．

（2）　$R_K(G)$ は各既約 G－K－加群の G－K－同型類を基とする自由加群である．

証明　（1）　写像 $\chi\colon M_K(G)\to ch_K(G)$ を

$$\chi([V])=\chi_V$$



と定義すると χ は半環準同型写像である（命題2.43(1)(2)）から，$\chi=\tilde{\chi}\phi_G$ をみたす環準同型写像 $\tilde{\chi}\colon R_K(G)\to ch_K(G)$ が（ただ1つ）存在する．この $\tilde{\chi}$ は環同型写像である．実際，χ は単射である（命題2.47）から，$\tilde{\chi}$ も単射である（補題1.2）．つぎに $ch_K(G)$ の元 χ' は

$$\chi'=\sum_i m_i\chi_i-\sum_j n_j\chi_j \qquad m_i>0,\ n_j>0,\ \chi_i=\chi_{V_i},\ \chi_j=\chi_{V_j}$$

と表わされるので，G－K－加群 $V=\bigoplus_i m_iV_i$，$W=\bigoplus_j n_jV_j$ をつくると $\chi'=\chi_V-\chi_W$ となる．したがって $R_K(G)$ の元 $\phi_G([V])-\phi_G([W])$ を考えると

$$\tilde{\chi}(\phi_G([V])-\phi_G([W]))=\chi([V])-\chi([W])=\chi_V-\chi_W=\chi'$$

となるから $\tilde{\chi}$ は全射である．よって $\tilde{\chi}$ は環同型写像である．

（2） (1) より ϕ_G は単射であることがわかるから，ϕ_G を省略して，$R_K(G)$ の元 $\phi_G([V])$ を単に $[V]$ と（さらに略して V と）かくことがある．命題の (2) もこのような述べ方をしている．さて $ch_K(G)$ は G の各既約 K－指標 χ_i を基とする自由加群であるから，それに加群同型である $R_K(G)$ も自由加群である．

（2） 表現環の実制限と複素化

定義　G－$\boldsymbol{C}$－加群 V に対してその実制限 G－$\boldsymbol{R}$－加群 $V_{\boldsymbol{R}}$ を対応させると，写像

$$r' : M(G) \to MO(G), \quad r'(V) = V_{\boldsymbol{R}}$$

を得る．この r' は半加群準同型写像である（命題 2.17）から，$\phi_G r' = r\phi_G$ をみたす加群準同型写像

$$r : R(G) \to RO(G)$$

がただ1つ存在する．この写像 r を**実制限写像**という．r は環準同型写像でないことに注意しよう．

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{r'} & MO(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_G} \\ R(G) & \xrightarrow{r} & RO(G) \end{array}$$

定義　G－$\boldsymbol{R}$－加群 V に対してその複素化 G－$\boldsymbol{C}$－加群 $V^{\boldsymbol{C}}$ を対応させると，写像

$$c' : MO(G) \to M(G) \quad c'(V) = V^{\boldsymbol{C}}$$

$$\begin{array}{ccc} MO(G) & \xrightarrow{c'} & M(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_G} \\ RO(G) & \xrightarrow{c} & R(G) \end{array}$$

を得る．この c' は半環準同型写像である（命題 2.19 (1) (2)）から，$\phi_G c' = c\phi_G$ をみたす環準同型写像

$$c : RO(G) \to R(G)$$

がただ1つ存在する．この写像 c を**複素化写像**という．

定義　G－$\boldsymbol{C}$－加群 V に対してその共役 G－$\boldsymbol{C}$－加群 $\bar{V}$ を対応させると，写像

$$\bar{\ } : M(G) \to M(G)$$

を得る．この写像 $\bar{\ }$ は半環準同型写像である（命題 2.10 (1) (2)）から，$\phi_G \bar{\ } = \bar{\ }\phi_G$ をみたす環準同型写像

$$\bar{\ } : R(G) \to R(G)$$

がただ1つ存在する．この写像 $\bar{\ }$ を**共役写像**という．

$$\begin{array}{ccc} M(G) & \xrightarrow{\ \bar{\ }\ } & M(G) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_G} \\ R(G) & \xrightarrow{\ \bar{\ }\ } & R(G) \end{array}$$

命題 2.20, 2.21 よりつぎの命題を得る．

命題 3.2　複素化写像 $c : RO(G) \to R(G)$ と実制限写像 $r : R(G) \to RO(G)$ との間にはつぎの関係がある．

$$rc = 2 \qquad cr = 1 + \bar{\ }$$

（これらは $rc(a) = 2a,\ a \in RO(G)$; $cr(a) = a + \bar{a},\ a \in R(G)$ のことである）．

この命題 3.2 より，つぎの2つの命題を得る．特に命題 3.4 は実表現環 $RO(G)$ の構造

を調べるのに非常に有力な手掛りを与えている．

命題 3.3 G をコンパクト群とするとき，複素化写像

$$c: RO(G) \to R(G)$$

は単射（環準同型写像）である．

証明 $c(a)=0$, $a \in RO(G)$ とする．これに実制限写像 r を施すと $rc(a)=0$, $2a=0$（命題 3.2）となる．G がコンパクト群であれば $RO(G)$ は自由加群である（命題 3.1 (2)）から，$a=0$ となる（3頁）．よって c は単射である．

命題 3.4 G をコンパクト群とする．複素表現環 $R(G)$ において，その環としての各生成元に G-$\boldsymbol{R}$-加群 V の複素化 G-$\boldsymbol{C}$-加群 V^C を選ぶことができるならば，複素化写像

$$c: RO(G) \to R(G)$$

は環同型写像である：$RO(G) \cong R(G)$．

証明 命題の仮定は c が全射であることを示している．したがって命題 3.3 とあわせると c が環同型写像になる．

(3) 群準同型写像のひきおこす写像

G, G' を位相群とし，$h: G' \to G$ を連続な群準同型写像とする．

定義 写像 $h^\#: M_K(G) \to M_K(G')$ を

$$h^\#([V]) = [h^\#(V)]$$

$$\begin{array}{ccc} M_K(G) & \xrightarrow{h^\#} & M_K(G') \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{G'}} \\ R_K(G) & \xrightarrow{h^*} & R_K(G') \end{array}$$

と定義する．この $h^\#$ は半環準同型写像である（命題 2.24 (1) (2)）から，$\phi_{G'}h^\# = h^*\phi_G$ をみたす環準同型写像

$$h^*: R_K(G) \to R_K(G')$$

がただ1つ存在する．この h^* を **h がひきおこす環準同型写像** という．また写像 $h^*: ch_K(G) \to ch_K(G')$ を

$$h^*(\chi_V) = \chi_{h^\#(V)} = h^\#\chi_V \qquad \chi_V \text{ は } G \text{ の } K\text{-指標}$$

（命題 2.43 (6)）をみたす加群準同型写像と定義する．この h^* は環準同型写像にもなっている．そして G, G' がコンパクト群の仮定のもとに，環同型写像 $\tilde{\chi}: R_K(G) \to ch_K(G)$, $\tilde{\chi}': R_K(G') \to ch_K(G')$（命題 3.1）との間には可換な関係

$$\begin{array}{ccc} R_K(G) & \xrightarrow{h^*} & R_K(G') \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}'} \\ ch_K(G) & \xrightarrow{h^*} & ch_K(G') \end{array}$$

$$\tilde{\chi}'h^* = h^*\tilde{\chi}$$

がなりたっている（命題 2.43 (6)）．

つぎの命題は命題 2.23 より明らかである.

命題3.5 (1) $1: G \to G$ を恒等写像とするとき, $1^*: R_K(G) \to R_K(G)$ も恒等写像である.

(2) G, G', G'' を位相群とし, $h': G'' \to G'$, $h: G' \to G$ を連続な群準同型写像とするとき

$$(hh')^* = h'^* h^*$$

$$R_K(G) \xrightarrow{h^*} R_K(G') \xrightarrow{h'^*} R_K(G''), \quad (hh')^*: R_K(G) \to R_K(G'')$$

がなりたつ.

§2. Weyl 群の作用

(1) 極大トーラス

定義 1次元球面 $S^1 = \{x \in \boldsymbol{C} \mid |x| = 1\}$ は (積に関して) 位相群をつくる. S^1 の $\boldsymbol{n}$ 個の直積位相群 $S^1 \times \cdots \times S^1$ を考え, この群に位相群として同型な位相群 T を $\boldsymbol{n}$ **次元トーラス**という.

トーラス T は弧状連結なコンパクト可換 Lie 群であるが, 逆に弧状連結なコンパクト可換 Lie 群はトーラスに限ることが知られている. また次元の等しい2つのトーラス T, T' に対して, 一方の T' が他方の T を部分群として含めば: $T \subset T'$ 実は $T = T'$ であることも知られている.

例3.1 つぎにあげる群はいずれも1次元トーラスである.

(1) $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ (実数加群 $\boldsymbol{R}$ の整数部分加群 $\boldsymbol{Z}$ による剰余位相加群)

(2) $S^1 = \{x \in \boldsymbol{C} \mid |x| = 1\} = U(1)$

(3) $SO(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{R}) \,\middle|\, \theta \in \boldsymbol{R}\right\}$

(4) $Spin(2) = \{\cos\theta + e_1 e_2 \sin\theta \in C(\boldsymbol{R}_-{}^2) \mid \theta \in \boldsymbol{R}\}$

定義 位相群 G の閉部分群 T がトーラスであり, かつ

$$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$$

となっているとき, T を G の**極大トーラス**という. 位相群 G は極大トーラスをもつとは限らない (例3.2) が, もし極大トーラスをもてば, G を**極大トーラスをもつ位相群**という.

補題3.6 位相群 G が極大トーラス T をもてば, G は弧状連結である.

証明 各 xTx^{-1}, $x \in G$ は弧状連結であり, かつ G の単位元 e を共有している. し

たがってその和集合 $G=\bigcup_{x\in G} xTx^{-1}$ は弧状連結である.

例 3.2 直交群 $O(n)$ は弧状連結でない（〔21〕定理 20 (2)）から，$O(n)$ は極大トーラスをもたない（補題 3.6).

位相群 G が極大トーラス T をもてば，T は本質的にはただ1つに定まることを示そう.

定義 G を位相群とする．G のある元 a が存在して，集合

$$A=\{a, a^2, \cdots, a^m, \cdots\}$$

が G で稠密になるとき，すなわち A の閉包 $\bar{A}$ が G に一致する：$\bar{A}=G$ とき，G は**生成元** a をもつという.

補題 3.7 (**Kronecker**) トーラス T は生成元をもつ.

証明 Q を有理数全体のつくる体とし，実数体 $\boldsymbol{R}$ を Q-加群とみなす．$1, a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{R}$ (n は T の次元) を Q-1次独立な元とするとき，$a=([a_1], \cdots, [a_n]) \in \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \times \cdots \times \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong T$ が T の生成元となる．この事実は明らかではないが，ここでは省略する (G. H. Hardy - E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford Clarendon Press, 1938, p. 370, Theorem 442).

また〔10〕に簡単な別証明があるので，それを紹介しておこう.

$T=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\times\cdots\times\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}=\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R} \pmod 1\}$ とし，T における算法を加法でかくことにする．T に可算開基 $U_1, U_2, \cdots, U_m, \cdots$（〔21〕83頁）をとる．$T$ にある元 a をとり，各 U_m が元 $N_m a$ ($N_m>0$ はある整数) を含むことを示すと補題が証明されたことになる．さて T の部分集合 $C=\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in T \mid |x_i-\xi_i| \leqq \varepsilon, i=1, \cdots, n\}$ を（点 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ を中心とし）1辺の長さが 2ε の cube ということにする．cube はコンパクト集合である．帰納法により，つぎに述べる方法で cube の減小系列

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_{m-1} \supset C_m \supset \cdots \qquad \text{(i)}$$

を構成しよう．任意の cube を1つとり，それを C_0 とする．C_{m-1} まで構成されたとする．C_{m-1} の1辺の長さが $2\varepsilon_{m-1}$ であるとして自然数 N_m を $N_m 2\varepsilon_{m-1}>1$ となるようにとると，明らかに $N_m C_{m-1}=\{x=N_m y \mid y\in C_{m-1}\}=T$ となる．このとき写像 $f: C_{m-1}\to T$, $f(y)=N_m y$ は連続な全射となるから，U_m に対して

$$N_m C_m \subset U_m$$

をみたす cube $C_m \subset C_{m-1}$ をとることができる．このようにして系列 (i) を構成する.

各 C_m はコンパクトであるから $\bigcap_{m=1}^{\infty} C_m$ は空集合でない（〔21〕命題 54）. $\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ の 1 つの元 a をとると，a が T の生成元になっている．実際，各 U_m はそのつくり方から元 $N_m a$ を含んでいるので，$\{a, 2a, \cdots, ma, \cdots\}$ は T で稠密である．以上で補題が証明された．

命題 3.8 G を極大トーラス T をもつ位相群とする．T' を G の任意の極大トーラスとすると，ある $x \in G$ が存在して

$$T' = xTx^{-1}$$

となる．逆に任意の $x \in G$ に対して $T' = xTx^{-1}$ は G の極大トーラスである．

証 明 T' を G の極大トーラスとし，a を T' の生成元とする（補題 3.7）．$a \in G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$ であるから，ある $x \in G$ が存在して $a \in xTx^{-1}$ となる．このとき $A = \{a, a^2, \cdots\} \subset xTx^{-1}$ となる．この両辺の閉包をとり，xTx^{-1} が G の閉集合であることに注意すると

$$T' \subset \bar{A} \subset \overline{xTx^{-1}} = xTx^{-1} \tag{i}$$

を得る．T と T' をいれかえて考えると，$y \in G$ が存在して $T \subset yT'y^{-1}$ を得る．これらより

$$T \subset yT'y^{-1} \subset yxTx^{-1}y^{-1} = (yx)T(yx)^{-1}$$

となる．しかるに T と $(yx)T(yx)^{-1}$ は次元の等しいトーラスであるから，等号 $T = yTy'^{-1} = yxTx^{-1}y^{-1}$ がなりたつ（127 頁）．このことから（i）においても等号 $T' = xTx^{-1}$ がなりたち，命題の前半が証明された．命題の後半は明らかであろう．

命題 3.9 G を極大トーラスをもつ位相群とする．G の極大トーラス T は，トーラスの包含関係の意味において極大である．すなわち T' が T を部分群として含む G のトーラス閉部分群ならば $T = T'$ となる．

証 明 T' の生成元 a をとり，命題 3.8 の証明と同じようにすると，ある $x \in G$ が存在して

$$T \subset T' \subset xTx^{-1}$$

となる．しかるに T と xTx^{-1} は次元の等しいトーラスであるから，等号 $T = T'(= xTx^{-1})$ がなりたつ（127 頁）．

注 意 弧状連結なコンパクト Lie 群 G においては，命題 3.9 の逆がなりたつことが知られている．すなわち G のトーラス T が包含関係の意味で極大であれば，$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$ となる（**Hopf**）．

定 義 G を極大トーラス T をもつ位相群とするとき，T の次元 n を G の**階 数**とい

い，rank $G=n$ で表わす．階数の定義は G の極大トーラスのとり方によらない（命題3.8)．

定義 G を極大トーラス T をもつ位相群とする．$N_T(G)$ を G における T の正規化群とするとき，$N_T(G)$ の T による剰余群

$$W(G)=N_T(G)/T$$

を G の **Weyl 群** という．Weyl 群 $W(G)$ は G の極大トーラスのとり方によらず（群同型を除いて）G に対して1意に定まる（命題3.8)．

（2） Weyl 群の表現環 $R(T)$ への作用

補題3.10 G, G' をコンパクト群とし，$h: G'\to G$ を連続な群準同型写像とする．G の各元 x に対し，ある $a\in G$ が存在して（a は x に関係してよい）

$$a^{-1}xa\in h(G')$$

となるならば，$h^*: R_K(G)\to R_K(G')$ は単射(環準同型写像)である．

証明 下図において $\tilde{\chi}, \tilde{\chi}'$ は $\tilde{\chi}'h^*=h^*\tilde{\chi}$ をみたす環同型写像である（126頁）から，

$$\begin{array}{ccc} R_K(G) & \xrightarrow{h^*} & R_K(G') \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\chi}'} \\ ch_K(G) & \xrightarrow{h^*} & ch_K(G') \end{array}$$

$h^*: R_K(G)\to R_K(G')$ が単射であることをいうためには，$h^*: ch_K(G)\to ch_K(G')$ が単射であることを示すとよい．さて $h^*\chi=0$, $\chi\in ch_K(G)$ としよう．これは $\chi(h(x'))=0$, $x'\in G'$ を意味している．仮定より，各 $x\in G$ に対して，$a^{-1}xa=h(x')$ となる $a\in G$, $x'\in G'$ が存在するので

$$\chi(x)=\chi(a^{-1}xa)\ (\text{命題}\ 2.42\ (3))=\chi(h(x'))=0$$

より $\chi=0$ となる．よって h^* は単射である．

補題3.11 G をコンパクト群とし，$h_a: G\to G$ を $a\in G$ による G の**内部自己同型写像**，すなわち

$$h_a(x)=a^{-1}xa \qquad x\in G$$

とする．このとき $h_a{}^*: R_K(G)\to R_K(G)$ は恒等写像である：$h_a{}^*=1$.

証明 $h_a: G\to G$ は連続な群同型写像であることに注意しよう．さて補題3.10の証明と同様，$h_a{}^*: ch_K(G)\to ch_K(G)$ が恒等写像であることを示せばよい．しかるに

$$(h_a{}^*\chi)(x)=\chi(h_a(x))=\chi(a^{-1}xa)=\chi(x)\ (\text{命題}\ 2.42\ (3)) \qquad \chi\in ch_K(G),\ x\in G$$

となるから $h_a{}^*=1$ である．

補題3.12 G を極大トーラス T をもつコンパクト群とし，$j: T\to G$ を包含写像と

する．このとき

$$j^*: R_K(G) \to R_K(T)$$

は単射（環準同型写像）である．

証明 $G = \bigcup_{a\in G} aTa^{-1}$ であるから，G の各元 x に対して $a^{-1}xa \in T$ となる $a \in G$ がある．よって j^* は単射である（補題3.10）．

G を極大トーラス T をもつ位相群とするとき，G の Weyl 群 $W(G)$ をつぎに示す方法で，T の表現環 $R_K(T)$ に働かすことができる．このことについて述べよう．$\omega = [w] \in W(G) = N_T(G)/T$ に対して，写像 $h_\omega: T \to T$ を

$$h_\omega(t) = w^{-1}tw \qquad t \in T$$

と定義する．（このh_ω の定義は ω の代表元 $w \in N_T(G)$ のとり方によらない）．$h_\omega: T \to T$ は連続な群同型写像であるから，h_ω は環同型写像 $h_\omega{}^*: R_K(T) \to R_K(T)$ を誘導する．しかるに $h_{\omega_1\omega_2} = h_{\omega_2}h_{\omega_1}$，$h_e = 1$ であるから，命題3.5より

$$h_{\omega_1\omega_2}{}^* = h_{\omega_1}{}^*h_{\omega_2}{}^* \qquad \omega_1, \omega_2 \in W(G)$$

$$h_e{}^* = 1 \qquad e \text{ は } W(G) \text{ の単位元}$$

がなりたつ．よって $R_K(T)$ において $\omega \in W(G)$ の作用を

$$\omega a = h_\omega{}^*(a) \qquad a \in R_K(T)$$

と定義すると，$W(G)$ は環 $R_K(T)$ に働く．特に

$$R_K(T)^{W(G)} = \{a \in R_K(T) \mid \omega a = a,\ \omega \in W(G)\}$$

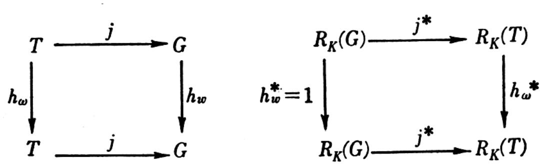
とおくと $R_K(T)^{W(G)}$ は $R_K(T)$ の部分環になる（56頁）．そしてつぎの重要な命題がなりたつ．

命題3.13 G を極大トーラス T をもつコンパクト群とし，$W(G)$ を G の Weyl 群とする．このとき包含写像 $j: T \to G$ は単射環準同型写像

$$j^*: R_K(G) \to R_K(T)^{W(G)}$$

を誘導する．

証明 写像 $j^*: R_K(G) \to R_K(T)$ において $j^*(R_K(G)) \subset R_K(T)^{W(G)}$ を示そう．$\omega \in W(G) = N_T(G)/T$ に対してその代表元 $w \in N_T(G)$ を1つとり，固定しておく．w による G の内部自己同型写像 $h_w: G \to G$，$h_w(x) =$



$w^{-1}xw$ と写像 $h_w: T \to T$, $h_w(t) = w^{-1}tw$ の間には $h_wj = jh_w$ の関係があるので, $j^*h_w^* = h_w^*j^*$ となる（命題3.5(2)). しかるに $h_w^* = 1$（補題3.11）であるから

$$j^* = h_w^*j^* \qquad w \in W(G)$$

がなりたつ. これより $w \in W(G)$, $a \in R_K(G)$ に対して $w(j^*(a)) = h_w^*(j^*(a)) = j^*(a)$ となる. すなわち $j^*(R_K(G)) \subset R_K(T)^{W(G)}$ である. j^* が単射であることは補題3.12で示した.

$j^*: R_K(G) \to R_K(T)^{W(G)}$ は単射環準同型写像であるから, $R_K(G)$ の元 a と $R_K(T)^{W(G)}$ の元 $j^*(a)$ とを同一視して, $R_K(G)$ を $R_K(T)^{W(G)}$ の部分環とみなすことにする：

$$R_K(G) \subset R_K(T)^{W(G)}$$

われわれは, 等号 $R_K(G) = R_K(T)^{W(G)}$ がなりたつことを期待して, もしこうなれば $R_K(T)^{W(G)}$ の構造を調べることにより, G の表現環 $R_K(G)$ の構造を知ろうとするのである†. なお弧状連結なコンパクト Lie 群 G の複素表現環 $R(G)$ については, つねに $R(G) = R(T)^{W(G)}$ となることが知られている（[10] Theorem 6.20). しかし, 本書ではこの事実を引用しないで, 古典群など具体的な群についてこのことを個々に導くことにする.

§3. トーラスの複素表現環

(1) S^1 の複素表現環

補題3.14 $\chi: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を連続な群準同型写像とすると, ある $a \in \boldsymbol{R}$ が存在して, χ は

$$\chi(t) = at \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

と表わされる.

証明 まず $\chi(s+t) = \chi(s) + \chi(t)$, $s, t \in \boldsymbol{R}$ の関係より $\chi\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}\chi(1)$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$ となることが m, n に関する帰納法により証明される. したがって $\chi(1) = a$ とおくと, 任意の有理数 r に対して $\chi(t) = ar$ がなりたつ. さて $t \in \boldsymbol{R}$ に対しては $\lim_{n\to\infty} r_n = t$ となる有理数 r_n が存在するので, χ が連続であることから

---

† この方法は, Lie 群 G の分類空間 B_G のコホモロジー環 $H^*(B_G)$ の構造を知るために, $H^*(B_T)^{W(G)}$ を調べようとする方法に類似している. A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groups de Lie compacts, Ann. Math., 57, 1953.

$$\tilde{\chi}(t)=\tilde{\chi}(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty}\tilde{\chi}(r_n)=\lim_{n\to\infty} ar_n=at$$

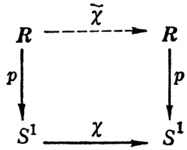
となる.

補題 3.15 $\chi: S^1 \to S^1$ を連続な群準同型写像とすると，ある整数 m が存在して

$$\chi(x)=x^m \qquad x\in S^1$$

と表わされる.

証明 写像 $p: \boldsymbol{R}\to S^1$ を $p(t)=e^{2\pi i t}$ と定義すると $(\boldsymbol{R}, p, S^1)$ は普遍被覆群† になる（〔21〕例 157). よって連続な群準同型写像 $\chi: S^1\to S^1$ に対して



$$p\tilde{\chi}=\chi p$$

をみたす連続な群準同型写像 $\tilde{\chi}: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が（ただ1つ）存在する（〔21〕命題 158). 補題 3.14 より，$\tilde{\chi}$ はある $a\in\boldsymbol{R}$ を用いて

$$\tilde{\chi}(t)=at \qquad t\in\boldsymbol{R}$$

と表わされる. この a は整数である. 実際，$1=\chi(1)=\chi(p(1))=p(\tilde{\chi}(1))=p(a)=e^{2\pi i a}$ より a は整数でなければならない. 以下 a を m とかくことにする. さて $p: \boldsymbol{R}\to S^1$ は全射であるから，$x\in S^1$ に対して $p(t)=x$ となる $t\in\boldsymbol{R}$ をとると

$$\chi(x)=\chi(p(t))=p(\tilde{\chi}(t))=p(mt)=(p(t))^m=x^m$$

となる.

定理 3.16 W を1次元 $\boldsymbol{C}$-加群とし，$x\in S^1\subset\boldsymbol{C}$ の作用を

$$xw=wx \qquad w\in W$$

と定義すると，W は S^1-$\boldsymbol{C}$-加群になる. そして任意の既約 S^1-$\boldsymbol{C}$-加群は

$$\cdots,\ \hat{W}\otimes\hat{W},\ \hat{W},\ \boldsymbol{C},\ W,\ W\otimes W,\ W\otimes W\otimes W,\ \cdots$$

のいずれかに S^1-$\boldsymbol{C}$-同型になり，かつ，これらのいずれの2つも S^1-$\boldsymbol{C}$-同型でない.

証明 V を既約 S^1-$\boldsymbol{C}$-加群とする. S^1 は可換群であるから，V は1次元である（命題 2.33). したがって V の指標 $\chi_V: S^1\to\boldsymbol{C}$ を考えるとき，S^1 がコンパクト群であることから，χ_V は連続な群準同型写像 $\chi_V: S^1\to U(1)=S^1$ になる（命題 2.11 (1)* (ii)). よって補題 3.15 より，ある整数 m が存在して

$$\chi_V(x)=x^m \qquad x\in S^1$$

---

† 被覆群および普遍被覆群の定義や性質は〔21〕4章§5にある.

と表わせる．一方 S^1-$\boldsymbol{C}$-加群 W^m[†] の指標 $\chi_{W^m}\colon S^1 \to S^1 \subset \boldsymbol{C}$ も

$$\chi_{W^m}(x) = (\chi_W(x))^m\ (\text{命題}\,2.43\,(2)\,(3)) = x^m \qquad x \in S^1$$

となるので χ_V と一致する：$\chi_V = \chi_{W^m}$．よって V は W^m に S^1-$\boldsymbol{C}$-同型である：$V \cong W^m$ (命題 2.47)．最後に W^m, $m = 0, \pm 1, \cdots$ が互いに S^1-$\boldsymbol{C}$-同型でないことは，それらの指標がすべて相異なるからである (命題 2.47)．

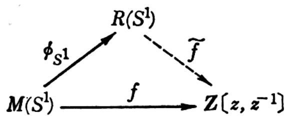
$R(S^1)$ において $\phi_{S^1}(W) = z$, $\phi_{S^1}(\hat{W}) = z^{-1}$ とおくときつぎの定理を得る．

定理 3.17 S^1 の複素表現環 $R(S^1)$ は $\boldsymbol{Z}[z, z^{-1}]$ に環同型である：

$$R(S^1) = \boldsymbol{Z}[z, z^{-1}]$$

証明 写像 $f\colon M(S^1) \to \boldsymbol{Z}[z, z^{-1}]$ を

$$f(\bigoplus_m n_m W^m) = \sum_m n_m z^m \qquad n_m \geqq 0,\ n_m,\ m \in \boldsymbol{Z}$$



と定義すると，f は半環準同型写像である．よって $f = \tilde{f}\phi_{S^1}$ をみたす環準同型写像 $\tilde{f}\colon R(S^1) \to \boldsymbol{Z}[z, z^{-1}]$ が存在する．この $\tilde{f}$ は環同型写像である．実際，f は単射であるから $\tilde{f}$ も単射である (補題 1.2)．つぎに $\boldsymbol{Z}[z, z^{-1}]$ の元は $\sum_i n_i z^i - \sum_j m_j z^j$, $n_i, m_j > 0$ の形をしているので，$a = \phi_{S^1}(\bigoplus_i n_i W^i) - \phi_{S^1}(\bigoplus_j m_j W^j) \in R(S^1)$ を考えるとき，$\tilde{f}(a) = \sum_i n_i z^i - \sum_j m_j z^j$ となる．よって $\tilde{f}$ は全射である．以上で定理が証明された．

(2) T の複素表現環

n 次元トーラス $T = S^1 \times \cdots \times S^1$ を考える．1 次元 $\boldsymbol{C}$-加群 W において $t = (t_1, \cdots, t_n) \in T$ の作用を

$$tw = wt_i \qquad w \in W$$

と定義すると，W は T-$\boldsymbol{C}$-加群になる．この T-$\boldsymbol{C}$-加群を W_i で表わし，$W_1, \cdots, W_n$ を T の**基本既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群**という．T の i 番目の直積因子の S^1 の既約 S^1-$\boldsymbol{C}$-加群の全体は，定理 3.16 より

$$W_i^m \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

であるから，命題 2.54 を用いるとつぎの定理を得る．

定理 3.18 n 次元トーラス T の既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群は (基本既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群 W_i, $i =$

---

† W を 1 次元 G-K-加群とする．$W, \hat{W}$ の m 個のテンソル積 G-K-加群 $W \otimes \cdots \otimes W$, $\hat{W} \otimes \cdots \otimes \hat{W}$ をそれぞれ W^m, W^{-m} で表わすことにする．なお W^0 は自明 G-K-加群 K のこととする．

1, …, n を用いて)

$$W_1^{m_1}\times\cdots\times W_n^{m_n}\qquad m_1,\ \cdots,\ m_n\in\boldsymbol{Z}$$

のいずれかに T-$\boldsymbol{C}$-同型になり，かつ，これらのいずれの2つも T-$\boldsymbol{C}$-同型ではない.

$R(T)$ において $\phi_T(W_i)=z_i$, $\phi_T(\hat{W}_i)=z_i^{-1}$ とおくとつぎの定理を得る.

定理 3.19 n 次元トーラス T の複素表現環 $R(T)$ は $\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ に環同型である：

$$R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1,\ z_1^{-1},\ \cdots,\ z_n,\ z_n^{-1}]$$

証明 写像 $f\colon M(T)\to\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ を

$$f(W_1^{m_1}\times\cdots\times W_n^{m_n})=z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}$$

をみたす半加群準同型写像とすると f は半環準同型写像になる．このとき $f=\tilde{f}\phi_T$ をみたす環準同型写像 $\tilde{f}\colon R(T)\to\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ が存在するが，この $\tilde{f}$ が環同型写像になっている（定理 3.17 の証明参照).

4 古典群の表現環

1, 2, 3 章の準備のもとに，本章で古典群 G の複素表現環 $R(G)$ を決定しよう．その方法は，G の Weyl 群 $W(G)$ を求め，その極大トーラス T の表現環 $R(T)$ への作用を調べて $R(T)^{W(G)}$ の構造を決定し，つぎに $R(T)^{W(G)}$ の生成元を与える G の表現を具体的に探して，$R(G)$ の構造を求めるという方法である．この方法で弧状連結な古典群 G の複素表現環 $R(G)$ はすべて決定されるが，実表現環 $RO(G)$ については決定される場合とされない場合とがある．

§1. ユニタリ群 $U(n)$

(1) $U(n)$ の位相的性質

ユニタリ群 $U(n)=\{A\in M(n, C)|AA^*=E\}$ は $M(n, C)$ の有界閉集合であるからコンパクトである（補題1.53）．$2n-1$ 次元球面 S^{2n-1} を $S^{2n-1}=\{a\in C^n|(a, a)=1\}$（例1.37）にとるとき，$A\in U(n)$, $a\in S^{2n-1}$ ならば $Aa\in S^{2n-1}$ となるから $U(n)$ は S^{2n-1} に働く．さらにこの働き方は推移的であり，かつ $e_n\in S^{2n-1}$ における $U(n)$ の等方群が $U(n-1)=\{A\in U(n)|Ae_n=e_n\}$ となるから位相同型

$$U(n)/U(n-1)\simeq S^{2n-1}$$

を得る（命題1.58）．$U(1)=S^1$ であるから，帰納的に $U(n-1)$ が弧状連結な $(n-1)^2$ 次元 Lie 群であると仮定すると，$U(n)$ が弧状連結な $(n-1)^2+(2n-1)=n^2$ 次元 Lie 群である（命題1.59）ことがわかる．以上のことをつぎの定理にまとめておこう（[21] 定理3, 20)．

定理4.1 $U(n)$ は弧状連結なコンパクト n^2 次元 Lie 群である．

(2) $U(n)$ の極大トーラスと Weyl 群

定理4.2

(1)
$$T=\left\{t=t(\theta_1, \cdots, \theta_n)=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\middle|\theta_1, \cdots, \theta_n\in R\right\}$$

は $U(n)$ の極大トーラスである．したがって $U(n)$ の階数は n である：$\operatorname{rank} U(n) = n$.

（2） $U(n)$ の Weyl 群は n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ に群同型である：

$$W(U(n)) \cong \mathfrak{S}_n$$

証明 （1） まず T が $U(n)$ の n 次元トーラスであることは明らかである．つぎに行列 $A \in U(n)$ は，ある $B \in U(n)$ により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \in T$$

の形に変形される（[21] 命題25 (2)）．これは T が $U(n)$ の極大トーラスであることを示している．

（2） 行列 $A \in U(n)$ が $A \in N_T(U(n))$ とする．すなわち任意の $X \in T$ に対して

$$AXA^{-1} = Y \in T$$

であるとしよう．このとき X と Y の固有値が一致するので，A は X の固有値の間の置換をひきおこす．この置換は X のとり方によらず，A により1意に定まることを示そう．いま X を

$$X = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \in T \qquad \mu_1, \cdots, \mu_n \text{ はすべて相異なる}$$

にとり，$AXA^{-1} = Y = \begin{pmatrix} \mu_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{k_n} \end{pmatrix}$ であるとして，$\mathfrak{S}_n$ の元

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^{-1}$$

をつくる．$A = \left(a_{ji}\right)$ とおくとき，$AX = YA$ より $\left(a_{ji}\mu_i\right) = \left(\mu_{k_j} a_{ji}\right)$ となるから

$$\mu_i \neq \mu_{k_j} \quad \text{ならば} \quad a_{ji} = 0$$

を得る．よって A は

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array} \begin{pmatrix} & k_n & k_1 & k_j & \\ \cdots & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{jk_j} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nk_n} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(j, k_j)-成分が a_{jk_j}, $j = 1, \cdots, n$ であって他の成分はすべて0の行列

$$= \begin{matrix} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots 1 \cdots\cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots 1 \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & & & \\ & a_{\sigma(2)2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{\sigma(n)n} \end{pmatrix}$$

（上の行列の列の位置：k_n, k_1, k_j）

の形をしている．この A の形は X のとり方によらない．さて写像 $f: N_T(U(n)) \to \mathfrak{S}_n$ を

$$f(A) = \sigma(A) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^{-1}$$

と定義すると，f は群準同型写像になる．f は全射である．実際，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^{-1} \in \mathfrak{S}_n$

に対して行列 $A = \begin{matrix} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots 1 \cdots\cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots 1 \cdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots 1 \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$（列の位置：$k_n$, k_1, k_j）をつくると，$A \in N_T(U(n))$ であって $f(A) = \sigma$ となるからである．f の核を求めよう．$A = (a_{ji}) \in U(n)$ が任意の $X = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \in T$ に対して $AXA^{-1} = X$ とする．このとき $AX = XA$，$\left(a_{ji}\mu_i\right) = \left(\mu_j a_{ji}\right)$ となるから

$$i \neq j \quad \text{ならば} \quad a_{ji} = 0$$

を得るので $A \in T$ となる．したがって $\mathrm{Ker}\, f = T$ である．よって写像 $\bar{f}: W(U(n)) = N_T(U(n))/T \to \mathfrak{S}_n$，$\bar{f}([A]) = f(A)$ は群同型写像である：$W(U(n)) \cong \mathfrak{S}_n$．

(3) 対称多項式

n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ に働いており，そして，すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma p = p$$

をみたす多項式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を**対称（多項）式**と名付けるのは例 1.34 で示した通りである．特につぎの n 個の対称式 $s_r = s_r(n) = s_r(n)(x_1, \cdots, x_n)$，$r = 1, \cdots, n$

$$\begin{cases} s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_r = \sum_{i_1<\cdots<i_r} x_{i_1}\cdots x_{i_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n = x_1\cdots x_n \end{cases}$$

を**基本対称式**という．基本対称式の間には（$\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n, t]$ において）関係

$$(1+x_1t)\cdots(1+x_nt) = 1+s_1t+\cdots+s_{n-1}t^{n-1}+s_nt^n$$

がなりたっている．また $s_r(n)(x_1, \cdots, x_n)$ において $x_n=0$[†] とおくと

$$s_r(n)(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = s_r(n-1)(x_1, \cdots, x_{n-1}) \quad r=1, \cdots, n-1$$

$$s_n(n)(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0$$

となる．

命題4.3 多項式環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ において，つぎの (1)(2)(3) がなりたつ．

（1） 対称式全体の集合 S は $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ の部分環をつくる．

（2） 対称式は基本対称式の多項式で表わされる．すなわち対称式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ は，ある多項式 $q \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を用いて

$$p(x_1, \cdots, x_n) = q(s_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, s_n(x_1, \cdots, x_n))$$

と表わされる．

（3） 基本対称式 $s_1, \cdots, s_n$ は代数的独立である．したがって (2) の結果とあわせると

$$S = (\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n])^{\mathfrak{S}_n} = \boldsymbol{Z}[s_1, \cdots, s_n]$$

となる．

証明 (1) は明らかである．

（2） n に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときには，$s_1=x_1$ であるから明らかになりたつ．変数の数が $n-1$ の対称式に対しては命題がなりたつとしよう．さて $p=p(x_1, \cdots, x_n)$ を m 次の対称式とする．

$$p_0(x_1, \cdots, x_{n-1}) = p(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$$

とおくと p_0 は変数 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ の対称式であるから，帰納法の仮定より，ある多項式 $g \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ が存在して

$$p_0(x_1, \cdots, x_{n-1}) = g(s_1(n-1), \cdots, s_{n-1}(n-1))$$

† 多項式 $p(x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ において $x_n=0$ とおくとは，p を剰余環 $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(x_n) \cong \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ の元とみなすことである．

と表わされる．多項式 $p_1 \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を

$$p_1(x_1, \cdots, x_n) = p(x_1, \cdots, x_n) - g(s_1(n), \cdots, s_{n-1}(n))$$

と定義すると p_1 は（次数が m 次以下の）対称式である．$p_1 = 0$ ならば命題は証明されたことになるから，$p_1 \neq 0$ としておく．$p_1(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0$ となるから p_1 は x_n の因数をもつ．しかるに p_1 は対称式であるので $s_n = x_1 \cdots x_n$ の因数をもつ．よって

$$p_1(x_1, \cdots, x_n) = s_n p_2(x_1, \cdots, x_n)$$

（p_2 は再び対称式である）と表わされる．したがって p は

$$p(x_1, \cdots, x_n) = s_n p_2(x_1, \cdots, x_n) + g(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

となる．p_2 を次数が m より小さい対称式であるから，次数に関する帰納法も仮定しておくと，p_2 は多項式 $h \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を用いて

$$p_2(x_1, \cdots, x_n) = h(s_1, \cdots, s_n)$$

と表わされる．よって

$$p(x_1, \cdots, x_n) = s_n h(s_1, \cdots, s_n) + g(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

となり，p を基本対称式 $s_1, \cdots, s_n$ の整式で表わすことができた．

（3） n に関する帰納法で証明する．$n = 1$ のときには命題は明らかになりたっているので，$\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ において $s_1(n-1), \cdots, s_{n-1}(n-1)$ が代数的独立であると仮定しよう．さて $s_1, \cdots, s_n$ に代数的関係が存在したとする．すなわち，ある多項式 $0 \neq p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して

$$p(s_1, \cdots, s_n) = 0$$

であるとする．$s_1, \cdots, s_n$ のこのような代数的関係 p のうちで p に現われる x_n の次数の最小値を m（$m \geqq 1$）とし，p をそのような多項式とする：

$$p(x_1, \cdots, x_n) = p_m(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n^m + \cdots + p_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n + p_0(x_1, \cdots, x_{n-1})$$

このとき仮定より

$$0 = p(s_1, \cdots, s_n) = p_m(s_1, \cdots, s_{n-1}) s_n^m + \cdots + p_1(s_1, \cdots, s_{n-1}) s_n + p_0(s_1, \cdots, s_{n-1})$$

となる．この式において $x_n = 0$ とおくと

$$0 = p_0(s_1(n-1), \cdots, s_{n-1}(n-1))$$

となるが，帰納法の仮定より $p_0 = 0$ である．したがって

$$q(x_1, \cdots, x_n) = p_m(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n^{m-1} + \cdots + p_1(x_1, \cdots, x_{n-1})$$

とおくとき，q も $q(s_1, \cdots, s_n) = 0$ をみたすが，m を $s_1, \cdots, s_n$ の代数的関係のうちで x_n の最小次数としたので仮定に反する．ゆえに $m = 0$ となり p は x_n を含まない．よっ

て $p = p_0 = 0$ となり $p \neq 0$ に反する．よって $s_1, \cdots, s_n$ は代数的独立である．

(4) $U(n)$-C-加群 C^n

n 次元 C-加群 C^n は $U(n)$-C-加群であった（例2.1）．T を定理4.2 (1) に示した $U(n)$ の極大トーラスとし，$j: T \to U(n)$ を包含写像とする．C^n を T-C-加群とみなして，すなわち T-C-加群 $j^\sharp(C^n)$ を考え，この $j^\sharp(C^n)$ を既約 T-C-加群の直和に分解しよう（命題2.29，2.33）．

補題4.4 $$j^\sharp(C^n) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$$

ここに $W_i,\ i = 1, \cdots, n$ は基本既約 T-C-加群である．

証明 C^n に標準基 $e_1, \cdots, e_n$ をとるとき，$t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$te_i = e_i e^{i\theta_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

がなりたつ．したがって e_i より生成される C^n の1次元部分 C-加群を W_i とおくと，W_i は T-C-加群であって

$$C^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$$

となる．よって補題が示された．

$$\begin{array}{ccc} M(U(n)) & \xrightarrow{j^\sharp} & M(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{U(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_T} \\ R(U(n)) & \xrightarrow{j^*} & R(T) \end{array}$$

$$\phi_T(W_i) = z_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと

$$R(T) = Z[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$$

であった（定理3.19）．$R(T)$ において

$$j^*(\phi_{U(n)}(\Lambda^r(C^n))) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n$$

とおく．記号を簡単にするために，$\phi_{U(n)}$ を省略して† $j^*(\phi_{U(n)}(\Lambda^r(C^n)))$ を $j^*(\Lambda^r(C^n))$ とかくことにする．このときつぎの命題がなりたつ．

命題4.5 $$j^*(\Lambda^r(C^n)) = \lambda_r = s_r \qquad r = 1, \cdots, n$$

ここに $s_1, \cdots, s_n$ は $z_1, \cdots, z_n$ の基本対称式とする．

証明 $\lambda_r = j^*(\phi_{U(n)}(\Lambda^r(C^n))) = \phi_T(j^\sharp(\Lambda^r(C^n))) = \phi_T(\Lambda^r(j^\sharp(C^n)))$（命題2.24 (5)）

$= \phi_T(\Lambda^r(W_1 \oplus \cdots \oplus W_n))$（補題4.4）

$= \phi_T(\bigoplus_{i_1 < \cdots < i_r} (W_{i_1} \otimes \cdots \otimes W_{i_r}))$（補題2.15）

---

† 以後ほとんどの場合，$\phi_G: M_K(G) \to R_K(G)$ の ϕ_G を省略するものとする（命題3.1(2) の証明の初めの部分参照）．すなわち G-K-加群 V に対して $\phi_G(V)$ を単に V とかくわけである．なお132頁で注意したように $j^*(\phi_G(V)) \in R(T)$ の j^* も省略することがある：$j^*(\phi_G(V)) = j^*(V) = V$.

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_r} z_{i_1}\cdots z_{i_r} = s_r(n)(z_1, \cdots, z_n) = s_r$$

(5) $U(n)$ の複素表現環

$R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ に Weyl 群 $W(U(n))\cong\mathfrak{S}_n$ が働いている (131 頁).

$\sigma\in W(U(n))$ の T における作用は $X=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\in T$ の固有値 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ の置換をひきおこしている (定理 4.2 (2) の証明参照) ので, $R(T)$ における $\sigma\in W(U(n))$ の作用も $z_1, \cdots, z_n$ の置換をひきおこしている. さて包含関係

$$R(U(n))\subset R(T)^{W(U(n))} \qquad \text{(i)}$$

(命題 3.13) において, $R(U(n))$ は $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$ からつくられた元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}$ をもっている. $R(U(n))$ が (そのために $R(T)^{W(U(n))}$ が) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}$ より環として生成されることを示そう. $p=p(z_1, \cdots, z_n)\in R(T)^{W(U(n))}$ に対して (分母を通分すると) ある多項式 $g\in\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ が存在して

$$p(z_1, \cdots, z_n)=(\lambda_n^{-1})^k g(z_1, \cdots, z_n)$$

と表わされる. しかるに p は $W(U(n))\cong\mathfrak{S}_n$ の作用で不変であるから, この g は $z_1, \cdots, z_n$ の対称式になる. よって g はある多項式 $h\in\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を用いて $g(z_1, \cdots, z_n)=h(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と表わされる (命題 4.3 (2)). したがって

$$p=(\lambda_n^{-1})^k h(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\in R(U(n))$$

となる. よって (i) における包含関係 $\subset$ は等号 $R(U(n))=R(T)^{W(U(n))}$ となり, $R(U(n))$ が $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}$ より環として生成されることが示された.

つぎに $R(U(n))$ の元が

$$\sum a_{i_1\cdots i_n}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n} \qquad a_{i_1\cdots i_n}\in\boldsymbol{Z},\ i_1\geqq 0, \cdots, i_{n-1}\geqq 0,\ i_n\in\boldsymbol{Z}$$

と1通りに表わされることを示そう. そのためには $\sum a_{i_1\cdots i_n}\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}=0$ として各係数 $a_{i_1\cdots i_n}$ が0となることをいうとよい. それは, もし $i_n<0$ ならば適当な λ_n^k をかけて $i_n\geqq 0$ としておくならば, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が代数的独立である (定理 4.3 (3)) ことから, すべて $a_{i_1\cdots i_n}=0$ となるからである. 以上よりつぎの定理を得る.

定理 4.6 $U(n)$ の複素表現環 $R(U(n))$は環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$ に環同型である:

$$R(U(n))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{C}^n). \cdots, \Lambda^{n-1}(\boldsymbol{C}^n), \Lambda^n(\boldsymbol{C}^n), \Lambda^n(\boldsymbol{C}^n)^{-1}]$$

(6) $U(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid X^* = -X\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{u}(n)$ は n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ を $U(n)$ の Lie 環という．$\mathfrak{u}(n)$ が n^2 次元であることは，その $\boldsymbol{R}$-基として

$$E_i{}^i = {\scriptstyle i}\begin{pmatrix} & \vdots^{\,i} & \\ \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{matrix} \\ {\scriptstyle i} \\ \\ {\scriptstyle j} \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} & \vdots^{\,i} & \vdots^{\,j} & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \quad G_{ij}{}^i = \begin{matrix} \\ {\scriptstyle i} \\ \\ {\scriptstyle j} \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} & \vdots^{\,i} & \vdots^{\,j} & \\ \cdots & \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \cdots, n \qquad\qquad i < j \qquad\qquad i < j$$

を選ぶことができるからである．$A \in U(n)$, $X \in \mathfrak{u}(n)$ ならば $AXA^{-1} \in \mathfrak{u}(n)$ であるから，$\mathfrak{u}(n)$ において $A \in U(n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{u}(n)$$

と定義すると，$\mathfrak{u}(n)$ は $U(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化 $\mathfrak{u}(n)^{\boldsymbol{C}}$ は $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{u}(n)^{\boldsymbol{C}}$ を調べよう．

補題 4.7 $$j^*(\mathfrak{u}(n)^{\boldsymbol{C}}) = \overbrace{\boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}}^{n} \oplus \bigoplus_{i<j}((W_i \otimes \hat{W}_j) \oplus (\hat{W}_i \otimes W_j))$$

証明 $\mathfrak{u}(n)^{\boldsymbol{C}}$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ．

$$h_i = E_i{}^i \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$u_{ij} = G_{ij} \otimes 1 - G_{ij}{}^i \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{u}_{ij} = -G_{ij} \otimes \boldsymbol{i} + G_{ij}{}^i \otimes 1 \qquad i < j$$

このとき $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$t \cdot h_i = h_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$t \cdot u_{ij} = u_{ij} e^{\boldsymbol{i}(\theta_i - \theta_j)\dagger}, \quad t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij} e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i - \theta_j)\dagger} \qquad i < j$$

がなりたつ．実際，

$$t \cdot h_i = t \cdot E_i{}^i \otimes 1 = tE_i{}^i t^{-1} \otimes 1 = E_i{}^i \otimes 1 = h_i$$

$$t \cdot u_{ij} = t \cdot (G_{ij} \otimes 1 - G_{ij}{}^i \otimes \boldsymbol{i}) = tG_{ij}t^{-1} \otimes 1 - tG_{ij}{}^i t^{-1} \otimes \boldsymbol{i}$$

---

† $n^2 - n$ 個の関数 $\theta_i - \theta_j$: $T \to \boldsymbol{R}$ $(i \neq j)$ は $U(n)$ の **root** とよばれ，$U(n)$ の（群論的，位相的）性質を決定する重要な関数である（[10] [12] [13] 参照）．古典群および例外群 G_2, F_4 の root 系はそれぞれの Lie 環の所で示されている．

$$=\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots & e^{i\theta_i}e^{-i\theta_j} & \cdots \\ \cdots & -e^{-i\theta_i}e^{i\theta_j} & \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\otimes 1-\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots & e^{i\theta_i}e^{-i\theta_j}\boldsymbol{i} & \cdots \\ \cdots & e^{-i\theta_i}e^{i\theta_j}\boldsymbol{i} & \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\otimes \boldsymbol{i}$$

$$=\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots & \cos(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j) & \cdots \\ \cdots & -\cos(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j) & \end{pmatrix}\otimes 1$$

$$-\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots & -\sin(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\cos(\theta_i-\theta_j) & \cdots \\ \cdots & \sin(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\cos(\theta_i-\theta_j) & \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}\otimes \boldsymbol{i}$$

$$=(G_{ij}\cos(\theta_i-\theta_j)+G_{ij}'\sin(\theta_i-\theta_j))\otimes 1-(-G_{ij}\sin(\theta_i-\theta_j)+G_{ij}'\cos(\theta_i-\theta_j))\otimes \boldsymbol{i}$$
$$=G_{ij}\otimes\cos(\theta_i-\theta_j)+G_{ij}'\otimes\sin(\theta_i-\theta_j)+G_{ij}\otimes\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j)-G_{ij}'\otimes\boldsymbol{i}\cos(\theta_i-\theta_j)$$
$$=G_{ij}\otimes(\cos(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j))-G_{ij}'\otimes\boldsymbol{i}(\cos(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j))$$
$$=(G_{ij}\otimes 1-G_{ij}'\otimes\boldsymbol{i})(\cos(\theta_i-\theta_j)+\boldsymbol{i}\sin(\theta_i-\theta_j))$$
$$=u_{ij}e^{i(\theta_i-\theta_j)}$$

となる．$t\cdot\hat{u}_{ij}=\hat{u}_{ij}e^{-i(\theta_i-\theta_j)}$ も同様にして示されるので，これらの式より補題を得る．

定理 4.8　$R(U(n))=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n,\lambda_n^{-1}]$ において

$$j^*(\mathfrak{u}(n)^C)=\lambda_1\lambda_{n-1}\lambda_n^{-1}$$

となる．

証明　$j^*(\mathfrak{u}(n)^C)=n+\sum_{i\neq j}z_iz_j^{-1}$ (補題 4.7) $=\sum_{i,j}z_iz_j^{-1}=(\sum_{i=1}^n z_i)(\sum_{j=1}^n z_j^{-1})$

$$=(\sum_{i=1}^n z_i)(\sum_{j=1}^n z_1\cdots\check{z}_j\cdots z_n)^{\dagger}(z_1\cdots z_n)^{-1}=\lambda_1\lambda_{n-1}\lambda_n^{-1}$$

注意　一般に $\mathfrak{g}$ を $\boldsymbol{R}$-Lie 環とするとき，$\mathfrak{g}$ の複素化 $\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{g}^C$ において Lie 積を

$$[X\otimes\alpha,\ Y\otimes\beta]=[X,\ Y]\otimes\alpha\beta\qquad X,\ Y\in\mathfrak{g},\ \alpha,\ \beta\in\boldsymbol{C}$$

をみたすように定義すると，$\mathfrak{g}^C$ は $\boldsymbol{C}$-Lie 環になる．この $\mathfrak{g}^C$ を $\mathfrak{g}$ の**複素化** $\boldsymbol{C}$**-Lie 環**という．さて $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ の複素化 $\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{u}(n)^C$ は $\mathfrak{gl}(n,\ \boldsymbol{C})$ (例 1.30) に $\boldsymbol{C}$-Lie 環

† $\check{z}_j$ は z_j を除く記号である．

として同型

$$\mathfrak{u}(n)^C \cong \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$$

となることを示そう．実際，写像 $f: \mathfrak{u}(n)^C \to \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$, $g: \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C}) \to \mathfrak{u}(n)^C$ を

$$f(X \otimes \alpha) = X\alpha$$

$$g(X) = \frac{X-X^*}{2} \otimes 1 + \frac{X+X^*}{2\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{i}$$

と定義すると，f, g は $\boldsymbol{C}$-Lie 環準同型写像であって $gf=1$, $fg=1$ をみたすからである．このことを用いると，補題 4.7 の証明の記述が少し簡単になるであろう．

例 4.1 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C}) = \{X \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid X^* = X\}$

は n^2 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，$A \in U(n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})$$

と定義すると $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})$ は $U(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})^C$ は $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $U(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})^C$ は $\mathfrak{u}(n)^C$ と同じく $R(U(n))$ において

$$j^*(\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{C})^C) = \lambda_1\lambda_{n-1}\lambda_n^{-1}$$

となる．証明は $\mathfrak{u}(n)^C$ のときと同じようにするとよい．

§2. 特殊ユニタリ群 $SU(n)$

(1) $SU(n)$ の位相的性質

特殊ユニタリ群 $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ は $U(n)$ の閉集合であるからコンパクト群である（補題 1.56）．$U(n)$ のときと同様にして，つぎの位相同型

$$SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$$

を得る．$SU(1)=1$ であるから，帰納的に $SU(n-1)$ が単連結な $(n-1)^2-1$ 次元 Lie 群であると仮定すると，$SU(n)$ が単連結な $(n-1)^2-1+(2n-1) = n^2-1$ 次元 Lie 群である（命題 1.59）ことがわかる．以上のことをつぎの定理にまとめておこう（[21] 定理 3, 20, 59）．

定理 4.9 $SU(n)$ は単連結なコンパクト n^2-1 次元 Lie 群である．

(2) $SU(n)$ の極大トーラスと Weyl 群

定理 4.10

$$(1)\qquad T=\left\{t=t(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\middle|\ e^{i\theta_1}\cdots e^{i\theta_n}=1,\ \theta_i\in\boldsymbol{R}\right\}$$

は $SU(n)$ の極大トーラスである．したがって $SU(n)$ の階数は $n-1$ である：rank $SU(n)=n-1$.

（2） $SU(n)$ の Weyl 群は n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ と群同型である：

$$W(SU(n))\cong\mathfrak{S}_n$$

証明 （1） まず T が $n-1$ 次元トーラスであることは明らかであろう．つぎに行列 $A\in SU(n)$ は，ある $B\in U(n)$ により $B^{-1}AB\in T$ の形に変形することができる（[21] 命題 25 (2)）が，もし $\det B\neq 1$ のときには，B の代りに $B'=B\begin{pmatrix}\det B^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\in SU(n)$ を用いると，$B'^{-1}AB'\in T$ となる．これは T が $SU(n)$ の極大トーラスであることを示している．

（2） 各行列の行列式が 1 となるように細工しながら，定理 4,2 (2) の証明と同じようにするとよい．

（3） $SU(n)$-C-加群 C^n

n 次元 $\boldsymbol{C}$-加群 $\boldsymbol{C}^n$ は $SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である（例 2.1）．T を定理 4.10 (1) に示した $SU(n)$ の極大トーラスとし，$j: T\to SU(n)$ を包含写像とする．$\boldsymbol{C}^n$ を T-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，補題 4.4 と同様にしてつぎの補題を得る．

補題 4.11　　　　$j^\#(\boldsymbol{C}^n)=W_1\oplus\cdots\oplus W_n$

ここに $W_i,\ i=1,\cdots,n$ は 1 次元 T-$\boldsymbol{C}$-加群であって

$$W_1\otimes\cdots\otimes W_n\cong\boldsymbol{C}$$

の関係がある．

$$\phi_T(W_i)=z_i\qquad i=1,\cdots,n$$

$$\begin{array}{ccc} M(SU(n)) & \xrightarrow{\ j^\#\ } & M(T)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{SU(n)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_T}\\ R(SU(n)) & \xrightarrow{\ j^*\ } & R(T)\end{array}$$

とおくと

$R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_n,z_n^{-1}]/(z_1\cdots z_n-1)$†

がなりたつ．$R(T)$ において

$$j^*(\Lambda^r(\boldsymbol{C}^n))=\lambda_r\qquad r=1,\cdots,n$$

† 環 $\boldsymbol{Z}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_n,z_n^{-1}]/(z_1\cdots z_n-1)$ は環 $\boldsymbol{Z}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_{n-1},z_{n-1}^{-1}]$ に環同型である．

とおく．このとき補題4.11を用いて命題4.5と同様にするとつぎの命題を得る．

命題4.12 $$j^*(\Lambda^r(\boldsymbol{C}^n)) = \lambda_r = s_r \qquad r = 1, \cdots, n-1$$
$$j^*(\Lambda^n(\boldsymbol{C}^n)) = \lambda_n = 1$$

ここに $s_1, \cdots, s_{n-1}$, $(s_n = 1)$ は $z_1, \cdots, z_n$ の基本対称式である．

（4） $SU(n)$ の複素表現環

命題4.12を考慮にいれると，$R(SU(n))$ の計算は，$R(U(n))$ において $\lambda_n = s_n = z_1 \cdots z_n = 1$ としたものと理解してよいのでつぎの定理を得る．

定理4.13 $SU(n)$ の複素表現環 $R(SU(n))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}]$ に環同型である：

$$R(SU(n)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{C}^n), \cdots, \Lambda^{n-1}(\boldsymbol{C}^n)]$$

（5） $SU(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{A}_{n-1}$

$$\mathfrak{A}_{n-1} = \{X \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid X^* = -X, \ \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{A}_{n-1}$ は n^2-1 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{A}_{n-1}$ を **$SU(n)$ の Lie 環**という．$\mathfrak{A}_{n-1}$ において $A \in SU(n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{A}_{n-1}$$

と定義すると，$\mathfrak{A}_{n-1}$ は $SU(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化 $\mathfrak{A}_{n-1}{}^{\boldsymbol{C}}$ は $SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $SU(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{A}_{n-1}{}^{\boldsymbol{C}}$ を調べよう．

補題4.14 $$j^*(\mathfrak{A}_{n-1}{}^{\boldsymbol{C}}) = \overbrace{\boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}}^{n-1} \oplus \bigoplus_{i \neq j} (W_i \otimes \hat{W}_j)$$

証明 143頁と同じ記号 $E_i{}^i$, G_{ij}, $G_{ij}{}^i$ を用いることにし，$\mathfrak{A}_{n-1}{}^{\boldsymbol{C}}$ の $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ．

$$h_i = (E_i{}^i - E_n{}^i) \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n-1$$
$$u_{ij} = G_{ij} \otimes 1 - G_{ij}{}^i \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{u}_{ij} = -G_{ij} \otimes \boldsymbol{i} + G_{ij}{}^i \otimes 1 \qquad i < j$$

このとき $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$t \cdot h_i = h_i \qquad i = 1, \cdots, n-1$$
$$t \cdot u_{ij} = u_{ij} e^{i(\theta_i - \theta_j)}, \quad t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} \qquad i < j$$

がなりたつ．これより補題を得る．

定理4.15 $R(SU(n)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}]$ において

$$j^*(\mathfrak{A}_{n-1}{}^{\boldsymbol{C}}) = \lambda_1 \lambda_{n-1} - 1$$

となる.

証明　$j^*(\mathfrak{A}_{n-1}{}^C) = n-1+\sum_{i\neq j} z_i z_j{}^{-1}$ (補題4.14) $= \lambda_1\lambda_{n-1}-1$ (定理4.8参照)

注意　$\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{A}_{n-1}$ の複素化 $\boldsymbol{C}$-Lie 環 $\mathfrak{A}_{n-1}{}^C$ は, Lie 積を $[X, Y] = XY-YX$ で与えられた $\boldsymbol{C}$-Lie 環

$$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) = \{X \in M(n, \boldsymbol{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

に $\boldsymbol{C}$-Lie 環同型である. この証明は $\mathfrak{u}(n)^C \cong \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$ (144頁注意) のときと同じである.

§3. シンプレクティック群 $Sp(n)$

(1) $Sp(n)$ の位相的性質

シンプレクティック群 $Sp(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{H}) \mid AA^* = E\}$ は $M(n, \boldsymbol{H})$ の有界閉集合であるからコンパクトである (補題1.53). $4n-1$ 次元球面 S^{4n-1} を $S^{4n-1} = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1\}$ (例1.37) にとるとき, $A \in Sp(n)$, $\boldsymbol{a} \in S^{4n-1}$ ならば $A\boldsymbol{a} \in S^{4n-1}$ となるから $Sp(n)$ は S^{4n-1} に働く. さらにこの働き方は推移的であり, かつ $\boldsymbol{e}_n \in S^{4n-1}$ における $Sp(n)$ の等方群が $Sp(n-1) = \{A \in Sp(n) \mid A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n\}$ となるから, 位相同型

$$Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$$

を得る (命題1.58). $Sp(1) = S_H{}^1 \cong S^3$ であるから, 帰納的に $Sp(n-1)$ が単連結な $(n-1)(2n-1)$ 次元 Lie 群であると仮定すると, $Sp(n)$ が単連結な $(n-1)(2n-1)+(4n-1) = n(2n+1)$ 次元 Lie 群である (命題1.59) ことがわかる. 以上のことをつぎの定理にまとめておこう ([21] 定理3, 20, 59).

定理 4.16　$Sp(n)$ は単連結なコンパクト $n(2n+1)$ 次元 Lie 群である.

(2) $Sp(n)$ の極大トーラスと Weyl 群

定義　$2n$ 個の文字 $N^{\pm} = \{-n, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n\}$ の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ のうちで, 条件

$$\sigma(-i) = -\sigma(i) \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたす σ 全体の集合を $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ で表わすと, $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ は $N^{\pm}$ における対称群 $\mathfrak{S}_{2n}$ の位数 $2^n n!$ の部分群をつくる. $\sigma \in \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ は $\sigma(i)$, $i = 1, \cdots, n$ の値を定めると決定するので, 記号

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \varepsilon_2 k_2 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_i = \pm 1,\ k_i = |\sigma(i)|$$

で表わすことにする. このとき $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ は置換になっている.

例 4.2 $\mathfrak{S}_5{}^{\pm}$ における積は，たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

のように与えられている．

命題4.17 $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ は，位数2の群 S^0 の n 個の直積群 $(S^0)^n = S^0\times\cdots\times S^0$ と n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の半直積に群同型である：

$$\mathfrak{S}_n{}^{\pm} \cong (S^0)^n\mathfrak{S}_n, \quad (S^0)^n \cap \mathfrak{S}_n = 1$$

証明 系列

$$1 \longrightarrow S^0\times\cdots\times S^0 \xrightarrow{\ j\ } \mathfrak{S}_n{}^{\pm} \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1$$

$$j(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & n \\ \varepsilon_1 1 & \cdots & \varepsilon_n n \end{pmatrix}$$

$$p\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ |i_1| & \cdots & |i_n| \end{pmatrix}$$

と定義すると j は単射群準同型写像であり，p は全射群準同型写像であって，かつ $\mathrm{Im}\, j = \mathrm{Ker}\, p$ をみたしている．よって，この系列は完全である．さらに写像 s: $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ を

$$s\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

と定義すると s は群準同型写像であって，$ps = 1$ をみたしている．よって，この系列は分裂している．したがって $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ は $(S^0)^n$ と $\mathfrak{S}_n$ の半直積に群同型である（補題1.51(2)）．

$Sp(n)$ の Weyl 群を求めるために，つぎの簡単な補題を準備しておく．

補題4.18 $\mu, \nu \in \boldsymbol{C}$, $a \in \boldsymbol{H}$ に対して，つぎの (1)(2)(3) がなりたつ．

(1) $\mu \neq \nu, \bar{\nu}$, $\quad a\mu = \nu a$ ならば $a = 0$

(2) $\mu \neq \bar{\mu}$, $\quad a\mu = \mu a$ ならば $a \in \boldsymbol{C}$

(3) $\mu \neq \bar{\mu}$, $\quad a\mu = \bar{\mu} a$ ならば $a = j\beta$, $\beta \in \boldsymbol{C}$

証明 (1) $a = \alpha + j\beta$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ とおくとき，条件 $a\mu = \nu a$, $(\alpha + j\beta)\mu = \nu(\alpha + j\beta)$, $\alpha\mu + j\beta\mu = \nu\alpha + j\bar{\nu}\beta$ より $\alpha\mu = \alpha\nu$, $\beta\mu = \beta\bar{\nu}$ となる．しかるに $\mu \neq \nu, \bar{\nu}$ であるから $\alpha = \beta = 0$, よって $a = 0$ となる．(2)(3) も (1) と同様にして証明される．

定理4.19

（1）

$$T=\left\{t=t(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\middle|\,\theta_1,\cdots,\theta_n\in \boldsymbol{R}\right\}$$

は $Sp(n)$ の極大トーラスである．したがって $Sp(n)$ の階数は n である：rank $Sp(n)=n$.

（2） $Sp(n)$ の Weyl 群は群 $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ に群同型である：

$$W(Sp(n))\cong\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$$

証 明 （1） まず T が $Sp(n)$ の n 次元トーラスであることは明らかである．つぎに行列 $A\in Sp(n)$ は，ある $B\in Sp(n)$ により

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n}\end{pmatrix}\in T$$

の形に変形される（[21] 命題25(3)）．これは T が $Sp(n)$ の極大トーラスであることを示している．

（2） 行列 $A\in Sp(n)$ が $A\in N_T(Sp(n))$ とする．すなわち任意の $X\in T$ に対して

$$AXA^{-1}=Y\in T$$

となるとしよう．このとき X と Y の固有値（X, Y の対角線上の元のこと）は順序と共役性を除いて一致している（[21] 命題181）．いま X を

$$X=\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}\in T \qquad \mu_1,\cdots,\mu_n,\bar{\mu}_1,\cdots,\bar{\mu}_n\in \boldsymbol{C}\text{ はすべて相異なる}$$

にとり，$AXA^{-1}=Y=\begin{pmatrix} \mu_{k_1}' & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{k_n}'\end{pmatrix}$ であるとすると $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ は置換になる．ただし μ_i' は μ_i か $\bar{\mu}_i$ のいずれかを表わすものとする．$A=(a_{ji})$ とおくとき，$AX=YA$ より

$$a_{ji}\mu_i=\mu_{k_j}'a_{ji} \qquad i,\ j=1,\cdots,n$$

となる．よって補題4.18より，A は

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array}\!\!\begin{pmatrix} & k_n & k_1 & k_j & \\ \cdots\cdots & \cdots & \epsilon_1\alpha_{1k_1} & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \epsilon_j\alpha_{jk_j} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \epsilon_n\alpha_{nk_n} & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$(j,\ k_j)$-成分が $\epsilon_j\alpha_{jk_j}$ ($\epsilon_j=1$, j, $\alpha_{jk_j}\in \boldsymbol{C}$), $j=1,\cdots,n$ であって他の成分はすべて0の行列

$$= \begin{matrix} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \epsilon_1 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \epsilon_j \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \epsilon_n & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{\tau(1)1} & & & \\ & \alpha_{\tau(2)2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_{\tau(n)n} \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^{-1}$$

（列の位置: k_n, k_1, k_j）

の形をしている．この A の形は X のとり方によらない．「たとえば $n=3$ として

$$X = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \mu_2 & & \\ & \bar{\mu}_3 & \\ & & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix}$$

$(k_1=2,\ k_2=3,\ k_3=1$ のときである）とするとき

$$\begin{pmatrix} a_{11}\mu_1 & a_{12}\mu_2 & a_{13}\mu_3 \\ a_{21}\mu_1 & a_{22}\mu_2 & a_{23}\mu_3 \\ a_{31}\mu_1 & a_{32}\mu_2 & a_{33}\mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_2 a_{11} & \mu_2 a_{12} & \mu_2 a_{13} \\ \bar{\mu}_3 a_{21} & \bar{\mu}_3 a_{22} & \bar{\mu}_3 a_{23} \\ \bar{\mu}_1 a_{31} & \bar{\mu}_1 a_{32} & \bar{\mu}_1 a_{33} \end{pmatrix}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & j\alpha_{23} \\ j\alpha_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{31} & & \\ & \alpha_{12} & \\ & & \alpha_{23} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{ji} \in C$$

の形の行列である.」さて写像 f: $N_T(Sp(n)) \to \mathfrak{S}_n^{\pm}$ を

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix}^{-1} \qquad \begin{matrix} \epsilon_i = 1 \text{ ならば } \varepsilon_i = 1 \\ \epsilon_i = j \text{ ならば } \varepsilon_i = -1 \end{matrix}$$

と定義すると，f は群準同型写像になる．f は全射である．実際，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix}^{-1} \in$ $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ に対して行列 $A = \begin{matrix} 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix}\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \epsilon_1 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \epsilon_j \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \epsilon_n & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$（列の位置: k_n, k_1, k_j）$(\varepsilon_i = 1$ ならば $\epsilon_i = 1$，$\varepsilon_i = -1$ ならば $\epsilon_j = j)$ をつくると，$A \in N_T(Sp(n))$ であって $f(A) = \sigma$ となる．f の核を求めよう．$A = \left(a_{ji}\right) \in Sp(n)$ が任意の $X = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \in T$ に対して $AXA^{-1} = X$ とする．このとき $AX = XA$，$\left(a_{ji}\mu_i\right) = \left(\mu_j a_{ji}\right)$ となるから，補題 4.18 より

$$i \neq j \quad \text{ならば} \quad a_{ji} = 0$$

$$(i=j\text{のとき})\quad a_{ii}\in C$$

を得るので $A\in T$ となる．したがって $\mathrm{Ker}\, f=T$ である．よって写像 $\bar{f}$: $W(Sp(n))=N_T(Sp(n))/T\to \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$, $\bar{f}([A])=f(A)$ は群同型写像である：$W(Sp(n))\cong\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$.

(3) $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$-不変多項式 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

補題 4.20 環 $Z[z, z^{-1}]$ において，z^m+z^{-m} は $z+z^{-1}$ の多項式で表わされる．すなわち z^m+z^{-m} はある多項式 $p_m\in Z[x]$ を用いて

$$z^m+z^{-m}=p_m(z+z^{-1})$$

と表わされる．

証明 $m=0$ のときには $p_0(x)=2$, $m=1$ のときには $p_1(x)=x$ とするとよい．さて

$$z^m+z^{-m}=(z+z^{-1})(z^{m-1}+z^{-(m-1)})-(z^{m-2}+z^{-(m-2)})$$

であるから，漸化式

$$p_m(x)=xp_{m-1}(x)-p_{m-2}(x)$$

より帰納的に p_m が求められる．

例 4.3 $z^2+z^{-2}=(z+z^{-1})^2-2$　　　　$p_2(x)=x^2-2$

$z^3+z^{-3}=(z+z^{-1})^3-3(z+z^{-1})$　　　　$p_3(x)=x^3-3x$

$z^4+z^{-4}=(z+z^{-1})^4-4(z+z^{-1})^2+2$　　　　$p_4(x)=x^4-4x^2+2$

一般に

$$p_m(x)=x^m-mx^{m-2}+\frac{m}{2}(m-3)x^{m-4}-\frac{m}{3}\binom{m-4}{2}x^{m-6}+\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{m}{k}\binom{m-k-1}{k-1}x^{m-2k}+\cdots$$

となる．

補題 4.21 R を単位元1をもつ可換環とする．$p\in R[z, z^{-1}]$ が

$$p(z)=p(z^{-1})$$

をみたすならば，p はある多項式 $g\in R[x]$ を用いて

$$p(z)=g(z+z^{-1})$$

と表わされる．

証明 $p(z)=\sum_m a_m z^m$, $a_m\in R$ とするとき，$p(z)=p(z^{-1})$ であるから $a_m=a_{-m}$,

$m=0, 1, 2, \cdots$ となる．よって p は

$$p(z)=a_0+\sum_{m\geqq 1}a_m(z^m+z^{-m})$$

の形をしている．しかるに各 z^m+z^{-m} は $z+z^{-1}$ の多項式で表わされる（補題 4.20）から，$p(z)$ も $z+z^{-1}$ の多項式で表わされる．

補題 4.22 R を単位元 1 をもつ可換環とする．このとき，環 $R[z, z^{-1}]$ において $z+z^{-1}$ は R-代数的独立である．すなわち

$$a_m(z+z^{-1})^m+\cdots+a_1(z+z^{-1})+a_0=0 \qquad a_i\in R$$

ならば $a_m=\cdots=a_1=a_0=0$ である．

証明 $\sum_{i=0}^{m}a_i(z+z^{-1})^i=0$ を展開して，z の最高次 z^m の係数を比較すると $a_m=0$ を得る．以下同様にして $a_{m-1}=\cdots=a_0=0$ を得る．

補題 4.21，4.22 において $R=\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_{n-1}, z_{n-1}^{-1}]$ として，n に関する帰納法を用いるとつぎの命題を得る．

命題 4.23 （1） $p\in\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ が各 $i=1, \cdots, n$ に対して

$$p(z_1, \cdots, z_i, \cdots, z_n)=p(z_1, \cdots, z_i^{-1}, \cdots, z_n)$$

をみたすならば，p は $z_1+z_1^{-1}, \cdots, z_n+z_n^{-1}$ の多項式で表わされる．すなわち p はある多項式 $g\in\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ を用いて

$$p(z_1, \cdots, z_n)=g(z_1+z_1^{-1}, \cdots, z_n+z_n^{-1})$$

と表わされる．

（2） $\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ において $z_1+z_1^{-1}, \cdots, z_n+z_n^{-1}$ は代数的独立である．

定義 $\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ において，$z_1+z_1^{-1}, \cdots, z_n+z_n^{-1}$ の基本対称式を $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ で表わす：

$$\begin{cases}\sigma_1=(z_1+z_1^{-1})+\cdots+(z_n+z_n^{-1})\\ \sigma_2=\sum_{i<j}(z_i+z_i^{-1})(z_j+z_j^{-1})\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=(z_1+z_1^{-1})\cdots(z_n+z_n^{-1})\end{cases}$$

また $z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}$ の基本対称式を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n}$ で表わす：

$$\begin{cases}\lambda_1=z_1+z_1^{-1}+\cdots+z_n+z_n^{-1}\\ \lambda_2=\sum_{i<j}(z_iz_j^{-1}+z_i^{-1}z_j+z_iz_j+z_i^{-1}z_j^{-1})+n\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

なお $\lambda_{2n-i}=\lambda_i,\ i=1,\cdots,n,\ \lambda_{2n}=1$ となっている．

補題 4.24　$\lambda_r,\ r=1,\cdots,n$ は $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ を用いて

$$\lambda_r=\sigma_r+\sum_{0\leqq k<r}a_k\sigma_k \qquad a_k\in \boldsymbol{Z}$$

と表わされる．ただし $\sigma_0=1$ とする．

証明

$$\sigma_r=\sum_{i_1<\cdots<i_r}(z_{i_1}+z_{i_1}{}^{-1})\cdots(z_{i_r}+z_{i_r}{}^{-1})$$

の右辺を展開するとわかるように，σ_r は任意の組 $\{i_1,\cdots,i_r\}$, $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n$ と $\varepsilon_j=\pm1,\ j=1,\cdots,r$ のすべてにわたってつくった項

$$z_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\cdots z_{i_r}{}^{\varepsilon_r}$$

の和である．一方 λ_r は任意の組 $\{i_1,\cdots,i_r\}$, $1\leqq i_1\leqq\cdots\leqq i_r\leqq n$（ただし $i_k=i_{k+1}=i_{k+2}$ の個所は現われない）と $\varepsilon_j=\pm1,\ j=1,\cdots,r$ のすべてにわたってつくった項

$$z_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\cdots z_{i_r}{}^{\varepsilon_r}$$

の和であるが，しかし $i_k=i_{k+1}$ となっているときには，$\varepsilon_k=-\varepsilon_{k+1}$ となっているものとする．すなわち $z_{i_k}z_{i_k}{}^{-1}$ や $z_{i_k}{}^{-1}z_{i_k}$ が現われると 1 におきかえるのである．σ_r に含まれている項は明らかに λ_r に含まれている．そして $\lambda_r-\sigma_r$ を考えると，$\lambda_r-\sigma_r$ に現われる項 $z_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\cdots z_{i_r}{}^{\varepsilon_r}$ の次数 k は r より小さい：$0\leqq k<r$．また $\lambda_r-\sigma_r$ に項 $z_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\cdots z_{i_k}{}^{\varepsilon_k}$ が a_k 個現われたとすると，$i_1,\cdots,i_k$ の置換および ε_j を $-\varepsilon_j$ におきかえた項も必ず現われるので，$\lambda_r-\sigma_r$ は σ_k を a_k 個含んでいる．よって

$$\lambda_r-\sigma_r=\sum_{0\leqq k<r}a_k\sigma_k \qquad a_k\in \boldsymbol{Z}$$

となる．

例 4.4　補題 4.24 の a_k をつぎのように具体的にかくこともできる．

$$\lambda_1=\sigma_1$$

$$\lambda_2=\sigma_2+n$$

$$\lambda_3=\sigma_3+(n-1)\sigma_1$$

$$\lambda_4=\sigma_4+(n-2)\sigma_2+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\lambda_5=\sigma_5+(n-3)\sigma_3+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\sigma_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_r=\sigma_r+(n-r+2)\sigma_{r-2}+\binom{n-r+4}{2}\sigma_{r-4}+\cdots+\binom{n-r+2k}{k}\sigma_{r-2k}+\cdots$$

....

$$\lambda_n = \sigma_n + 2\sigma_{n-2} + \binom{4}{2}\sigma_{n-4} + \cdots + \binom{2k}{k}\sigma_{n-2k} + \cdots$$

各 σ_r は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ で表わすことができるが，上の関係式を用いて具体的に求めるとつぎのようになる．

$$\sigma_1 = \lambda_1$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 - n$$

$$\sigma_3 = \lambda_3 - (n-1)\lambda_1$$

$$\sigma_4 = \lambda_4 - (n-2)\lambda_2 + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\sigma_5 = \lambda_5 - (n-3)\lambda_3 + \frac{(n-1)(n-4)}{2}\lambda_1$$

....

$$\sigma_r = \lambda_r - (n-r+2)\lambda_{r-2} + \frac{(n-r+4)}{2}\binom{n-r+1}{1}\lambda_{r-4} - \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{(n-r+2k)}{k}\binom{n-r+k-1}{k-1}\lambda_{r-2k} + \cdots$$

....

$$\sigma_n = \lambda_n - 2\lambda_{n-2} + 2\lambda_{n-4} - \cdots + (-1)^k 2\lambda_{n-2k} + \cdots$$

命題 4.25 $\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ において $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ および $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は代数的独立であり，かつ

$$\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$$

がなりたつ．

証明 $z_1 + z_1^{-1}, \cdots, z_n + z_n^{-1}$ は代数的独立である(命題 4.23 (2))から，その基本対称式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ も代数的独立である(命題 4.3 (3))．さらに補題 4.24 を用いると $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ も代数的独立であることがわかる．実際，ある多項式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$$

とする．$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ において，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に関する最高次の係数を a とするとき

$$p(\sigma_1, \sigma_2 + n, \cdots, \sigma_r + \sum_k a_k\sigma_k, \cdots) = 0$$

の左辺における $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ に関する最高次の係数も a である．しかるに $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ は代

数的独立であるから $a=0$ となる．この方法を繰返すと $p=0$ であることがわかる．よって $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は代数的独立である．各 λ_r は $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の多項式で（実は1次式で）表わされる（補題4.24）ので

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$$

である．逆に各 σ_r は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の多項式で（実は1次式で）表わされるので

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$$

である．以上より $\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ を得る．

（4） $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{H}^n)_C$

（n 次元 $\boldsymbol{H}$-加群）$\boldsymbol{H}^n$ の元 u に行列 $A \in Sp(n)$ を（左から）掛ける方法で，$Sp(n)$ は $\boldsymbol{H}^n$ に働らく．（この $\boldsymbol{H}^n$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{H}$-加群というべきものである）．したがって（$\boldsymbol{H}^n$ の体 $\boldsymbol{C}$ への複素制限）$(\boldsymbol{H}^n)_C$（例1.12）は $2n$ 次元 $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群になる．T を定理4.19(1) に示した $Sp(n)$ の極大トーラスとし，$j\colon T \to Sp(n)$ を包含写像とする．$(\boldsymbol{H}^n)_C$ を T-$\boldsymbol{C}$-加群とみて既約部分 T-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解しよう．

補題 4.26　　$j^\#((\boldsymbol{H}^n)_C) = W_1 \oplus \hat{W}_1 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus \hat{W}_n$

ここに W_i, $i=1, \cdots, n$ は基本既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群であり，$\hat{W}_i$ は W_i の双対 T-$\boldsymbol{C}$-加群とする．

証明　$(\boldsymbol{H}^n)_C$ につぎの $\boldsymbol{C}$-基を選ぶ（例1.12）．

$$u_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \hat{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{j},\ \cdots,\ u_n = \boldsymbol{e}_n,\ \hat{u}_n = \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{j}$$

このとき $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$tu_i = u_i e^{i\theta_i}, \qquad t\hat{u}_i = \hat{u}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

がなりたつ．実際，$tu_i = u_i e^{i\theta_i}$ は明らかであり，また

$$t\hat{u}_i = t\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_i e^{i\theta_i} \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{j} e^{-i\theta_i} = \hat{u}_i e^{-i\theta_i}$$

となるからである．u_i, $\hat{u}_i$ より生成される $(\boldsymbol{H}^n)_C$ の部分 $\boldsymbol{C}$-加群をそれぞれ W_i, $\hat{W}_i$ とすると補題を得る．

$$\phi_T(W_i) = z_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと

$$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$$

であった（定理3.19）．$W_i \otimes \hat{W}_i \cong \boldsymbol{C}$（命題2.8）に

$$\begin{array}{ccc} M(Sp(n)) & \xrightarrow{j^\#} & M(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{Sp(n)}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_T} \\ R(Sp(n)) & \xrightarrow{j^*} & R(T) \end{array}$$

注意して補題4.26を用いると，$R(T)$ においてつぎの命題を得る．計算は命題4.5と同じようにするとよい．

命題 4.27 $j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{H}^n)_C)) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n, \ (n+1, \cdots, 2n)$

ここに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, (\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n})$ は $z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}$ の基本対称式とする.

(5) $Sp(n)$ の複素表現環

$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ に Weyl 群 $W(Sp(n)) \cong \mathfrak{S}_n{}^{\pm} \cong (S^0)^n\mathfrak{S}_n$ (命題 4.17) が働いていた (131 頁). $W(Sp(n))$ の T における作用は $X = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$ の固有値 $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ に対して, $(1, \cdots, \overset{i}{-1}, \cdots, 1) \in (S^0)^n$ は変換 $e^{i\theta_i} \to e^{-i\theta_i}$ をひきおこし, $\mathfrak{S}_n$ の元は $e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}$ の置換をひきおこしている (定理 4.19 (2) の証明参照) ので, $R(T)$ における $W(Sp(n))$ の作用も, 変換 $z_i \to z_i^{-1}$, $i = 1, \cdots, n$ および $z_1, \cdots, z_n$ の置換をひきおこしている. さて $R(Sp(n))$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{H}^n)_C$ からつくられた n 個の元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもっている. そして

$$\begin{aligned} R(Sp(n)) \subset R(T)^{W(Sp(n))} &= (R(T)^{(S^0)^n})^{\mathfrak{S}_n} \quad (\text{補題 } 1.52) \\ &= (\boldsymbol{Z}[z_1 + z_1^{-1}, \cdots, z_n + z_n^{-1}])^{\mathfrak{S}_n} \quad (\text{命題 } 4.23) \\ &= \boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \quad (\text{命題 } 4.3\,(3)) \\ &= \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n] \quad (\text{命題 } 4.25) \subset R(Sp(n)) \end{aligned}$$

となるので, この包含関係 $\subset$ は等号 $=$ となる. すなわち

$$R(Sp(n)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$$

がなりたつ. 以上よりつぎの定理を得る.

定理 4.28 $Sp(n)$ の複素表現環 $R(Sp(n))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ に環同型である:

$$R(Sp(n)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{H}^n)_C), \cdots, \Lambda^n((\boldsymbol{H}^n)_C)]$$

(6) $Sp(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{C}_n$

$$\mathfrak{C}_n = \{X \in M(n, \boldsymbol{H}) \mid X^* = -X\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると $\mathfrak{C}_n$ は $n(2n+1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる. この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{C}_n$ を **$Sp(n)$ の Lie 環**という. $\mathfrak{C}_n$ が $n(2n+1)$ 次元であることは, その $\boldsymbol{R}$-基として

$$E_i{}^i = {\scriptstyle i}\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & i & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}, \quad E_i{}^j = {\scriptstyle i}\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}, \quad E_i{}^k = {\scriptstyle i}\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & k & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \cdots, n \qquad\qquad i = 1, \cdots, n \qquad\qquad i = 1, \cdots, n$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, \qquad G_{ij}{}^{i} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix},$$

$$i < j \qquad\qquad i < j$$

$$G_{ij}{}^{j} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{j} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{j} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, \qquad G_{ij}{}^{k} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{k} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{k} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$i < j \qquad\qquad i < j$$

を選ぶことができるからである． $A \in Sp(n)$, $X \in \mathfrak{S}_n$ ならば $AXA^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ であるから，$\mathfrak{S}_n$ における $A \in Sp(n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{S}_n$$

と定義すると，$\mathfrak{S}_n$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる． したがって， その複素化 $\mathfrak{S}_n{}^{C}$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{S}_n{}^{C}$ を調べよう．

補題 4.29　$j^*(\mathfrak{S}_n{}^{C}) = \overbrace{\boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}}^{n} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} ((W_i \otimes W_i) \oplus (\hat{W}_i \otimes \hat{W}_i))$

$$\oplus \bigoplus_{i<j} ((W_i \otimes \hat{W}_j) \oplus (\hat{W}_i \otimes W_j)) \oplus \bigoplus_{i<j} ((W_i \otimes W_j) \oplus (\hat{W}_i \otimes \hat{W}_j))$$

証明　$\mathfrak{S}_n{}^{C}$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ．

$$h_i = E_i{}^{i} \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$w_i = E_i{}^{j} \otimes 1 - E_i{}^{k} \otimes \boldsymbol{i}, \qquad \hat{w}_i = -E_i{}^{j} \otimes \boldsymbol{i} + E_i{}^{k} \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$u_{ij} = G_{ij} \otimes 1 - G_{ij}{}^{i} \otimes \boldsymbol{i}, \qquad \hat{u}_{ij} = -G_{ij} \otimes \boldsymbol{i} + G_{ij}{}^{i} \otimes 1 \qquad i < j$$

$$v_{ij} = G_{ij}{}^{j} \otimes 1 - G_{ij}{}^{k} \otimes \boldsymbol{i}, \qquad \hat{v}_{ij} = -G_{ij}{}^{j} \otimes \boldsymbol{i} + G_{ij}{}^{k} \otimes 1 \qquad i < j$$

このとき $t = t(\theta_1\ \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$t \cdot h_i = h_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$t \cdot w_i = w_i e^{2i\theta_i}, \qquad t \cdot \hat{w}_i = \hat{w}_i e^{-2i\theta_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$t \cdot u_{ij} = u_{ij} e^{i(\theta_i - \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} \qquad i < j$$

$$t \cdot v_{ij} = v_{ij} e^{i(\theta_i + \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{v}_{ij} = \hat{v}_{ij} e^{-i(\theta_i + \theta_j)} \qquad i < j$$

がなりたつ． 実際， $t \cdot h_i = h_i$, $t \cdot u_{ij} = u_{ij} e^{i(\theta_i - \theta_j)}$, $t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij} e^{-i(\theta_i - \theta_j)}$ の計算は $\mathfrak{U}(n)^{C}$

のとき（補題4.7）と全く同じである．

$$t\cdot w_i = t\cdot E_i{}^{\boldsymbol{j}} \otimes 1 - t\cdot E_i{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{i} = tE_i{}^{\boldsymbol{j}}t^{-1} \otimes 1 - tE_i{}^{\boldsymbol{k}}t^{-1} \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= {}_i\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & e^{\boldsymbol{i}\theta_i}\boldsymbol{j}e^{-\boldsymbol{i}\theta_i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \otimes 1 - {}_i\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & e^{\boldsymbol{i}\theta_i}\boldsymbol{k}e^{-\boldsymbol{i}\theta_i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= {}_i\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & \boldsymbol{j}e^{-2\boldsymbol{i}\theta_i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \otimes 1 - {}_i\begin{pmatrix} & \overset{i}{\vdots} & \\ \cdots & \boldsymbol{k}e^{-2\boldsymbol{i}\theta_i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= E_i{}^{\boldsymbol{j}}e^{-2\boldsymbol{i}\theta_i} \otimes 1 - E_i{}^{\boldsymbol{k}}e^{-2\boldsymbol{i}\theta_i} \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= E_i{}^{\boldsymbol{j}}(\cos 2\theta_i - \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i) \otimes 1 - E_i{}^{\boldsymbol{k}}(\cos 2\theta_i - \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i) \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= E_i{}^{\boldsymbol{j}} \otimes \cos 2\theta_i + E_i{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \sin 2\theta_i - E_i{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{i}\cos 2\theta_i + E_i{}^{\boldsymbol{j}} \otimes \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i$$

$$= E_i{}^{\boldsymbol{j}} \otimes (\cos 2\theta_i + \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i) - E_i{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{i}(\cos 2\theta_i + \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i)$$

$$= (E_i{}^{\boldsymbol{j}} \otimes 1 - E_i{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{i})(\cos 2\theta_i + \boldsymbol{i}\sin 2\theta_i)$$

$$= w_i e^{2\boldsymbol{i}\theta_i}$$

となる．$t\cdot\hat{w}_i = \hat{w}_i e^{-2\boldsymbol{i}\theta_i}$ も同様である．

$$t\cdot v_{ij} = t\cdot G_{ij}{}^{\boldsymbol{j}} \otimes 1 - t\cdot G_{ij}{}^{\boldsymbol{k}} \otimes \boldsymbol{i} = tG_{ij}{}^{\boldsymbol{j}}t^{-1} \otimes 1 - tG_{ij}{}^{\boldsymbol{k}}t^{-1} \otimes \boldsymbol{i}$$

（$e^{\boldsymbol{i}\theta_i}\boldsymbol{j}e^{-\boldsymbol{i}\theta_j} = \boldsymbol{j}e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)}$, $e^{\boldsymbol{i}\theta_i}\boldsymbol{k}e^{-\boldsymbol{i}\theta_j} = \boldsymbol{k}e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)}$ を用いると）

$$= G_{ij}{}^{\boldsymbol{j}}e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)} \otimes 1 - G_{ij}{}^{\boldsymbol{k}}e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)} \otimes \boldsymbol{i}$$

（$t\cdot w_i = w_i e^{2\boldsymbol{i}\theta_i}$ のときと同じ計算をすると）

$$= v_{ij}e^{\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)}$$

となる．$t\cdot\hat{v}_{ij} = \hat{v}_{ij}e^{-\boldsymbol{i}(\theta_i+\theta_j)}$ も同様である．これらの式より補題を得る．

定理 4.30 $R(Sp(n)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ において

$$j^*(\mathfrak{C}_n{}^C) = \lambda_1{}^2 - \lambda_2$$

となる．

証明 $j^*(\mathfrak{C}_n{}^C) = n + \sum_{i=1}^{n}(z_i{}^2 + z_i{}^{-2}) + \sum_{i<j}(z_iz_j{}^{-1} + z_i{}^{-1}z_j) + \sum_{i<j}(z_iz_j + z_i{}^{-1}z_j{}^{-1})$

$$= \Bigl(\sum_{i=1}^{n}(z_i + z_i{}^{-1})\Bigr)^2 - \Bigl(\sum_{i<j}(z_iz_j{}^{-1} + z_i{}^{-1}z_j + z_iz_j + z_i{}^{-1}z_j{}^{-1}) + n\Bigr)$$

$$= \lambda_1{}^2 - \lambda_2$$

例 4.5 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H}) = \{X \in M(n, \boldsymbol{H}) \mid X^* = X\}$

は $n(2n-1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり，$A \in Sp(n)$ の作用を

$$A\cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H})$$

と定義すると $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H})$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H})^{\boldsymbol{C}}$ は $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $Sp(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H})^{\boldsymbol{C}}$ は $R(Sp(n))$ において

$$j^*(\mathfrak{J}(n, \boldsymbol{H})^{\boldsymbol{C}}) = \lambda_2$$

となる．証明は $\mathfrak{C}_n{}^{\boldsymbol{C}}$ のときと同じようにするとよい．

§4. 回転群 $SO(2n+1)$

(1) $SO(n)$ の位相的性質

回転群 $SO(n) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \mid A^tA = E, \det A = 1\}$ は $M(n, \boldsymbol{R})$ の有界閉集合であるからコンパクトである（補題1.53）．$n-1$ 次元球面 S^{n-1} を $S^{n-1} = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1\}$ にとるとき，$A \in SO(n)$, $\boldsymbol{a} \in S^{n-1}$ ならば $A\boldsymbol{a} \in S^{n-1}$ となるから $SO(n)$ は S^{n-1} に働く．さらにこの働き方は推移的であり，かつ $\boldsymbol{e}_n \in S^{n-1}$ における $SO(n)$ の等方群が $SO(n-1) = \{A \in SO(n) \mid A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n\}$ となるから，位相同型

$$SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}$$

を得る（命題1.58）．$SO(1) = 1$ であるから，帰納的に $SO(n-1)$ が弧状連結な $(n-1)(n-2)/2$ 次元 Lie 群であると仮定すると，$SO(n)$ が弧状連結な $(n-1)(n-2)/2+(n-1) = n(n-1)/2$ 次元 Lie 群である（命題1.59）ことがわかる．以上のことをつぎの定理にまとめておこう（[21] 定理3, 20）．

定理 4.31 $SO(n)$ は弧状連結なコンパクト $n(n-1)/2$ 次元 Lie 群である．

(2) $SO(2n+1)$ の極大トーラスと Weyl 群

$SO(2n+1)$ の Weyl 群を求めるために，つぎの簡単な補題を準備しておく．

補題 4.32 $X = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, $X^- = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} c' & -s' \\ s' & c' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b' & a' \end{pmatrix}$ $\in M(2, \boldsymbol{R})$ に対して，つぎの (1) (2) (3) がなりたつ．

(1) $s \neq 0$, $AX = XA$ ならば $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(2) $s \neq 0$, $AX = X^-A$ ならば $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(3) $c \neq c'$ か $s \neq s'$ または $s \neq -s'$ で，かつ $AX = X'A$ ならば $A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

証 明 (1) 条件 $AX = XA$, すなわち

$$\begin{pmatrix} ac - bs & -as - bc \\ b'c + a's & -b's + a'c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - sb' & -cb - sa' \\ sa + cb' & -sb + ca' \end{pmatrix}$$

の第1行の成分を比較すると $bs = sb'$, $as = sa'$ を得る. $s \neq 0$ の仮定より $b = b'$, $a = a'$ となる.

(2) の証明も (1) と同様である.

(3) 条件 $AX = X'A$, すなわち

$$\begin{pmatrix} ac - bs & -as - bc \\ b'c + a's & -b's + a'c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'a - s'b' & -c'b - s'a' \\ s'a + c'b' & -s'b + c'a' \end{pmatrix}$$

の各成分を等しいとおくと, 連立方程式

$$\begin{cases} (c - c')a \quad -sb \quad +s'b' = 0 \\ sa + (c - c')b \quad -s'a' = 0 \\ -s'a \quad +(c - c')b' \quad +sa' = 0 \\ s'b \quad -sb' + (c - c')a' = 0 \end{cases}$$

を得る. しかるに各係数のつくる行列式を計算すると

$$\det\begin{pmatrix} c - c' & -s & s' & 0 \\ s & c - c' & 0 & -s' \\ -s' & 0 & c - c' & s \\ 0 & s' & -s & c - c' \end{pmatrix}$$

$$= (c - c')^4 + s^4 + s'^4 + 2(c - c')^2 s^2 + 2(c - c')^2 s'^2 - 2s^2 s'^2$$

$$= ((c - c')^2 + (s - s')^2)((c - c')^2 + (s + s')^2) \neq 0$$

であるから $a = b = b' = a' = 0$ となる.

定理 4.33

(1) $$T = \left\{ t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| X_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \ \theta_i \in \boldsymbol{R} \right\}$$

は $SO(2n + 1)$ の極大トーラスである. したがって $SO(2n + 1)$ の階数は n である: $\operatorname{rank} SO(2n + 1) = n$.

(2) $SO(2n + 1)$ の Weyl 群は群 $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ に群同型である:

$$W(SO(2n+1)) \cong \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$$

証明 (1) まず T が $SO(2n+1)$ の n 次元トーラスであることは明らかである．つぎに行列 $A \in SO(2n+1)$ は，ある $B \in SO(2n+1)$ により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in T \qquad X_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

の形に変形される（[21] 命題 25 (1)）．これは T が $SO(2n+1)$ の極大トーラスであることを示している．

(2) 行列 $A \in SO(2n+1)$ が $A \in N_T(SO(2n+1))$ とする．すなわち任意の $X \in T$ に対して

$$AXA^{-1} = Y \in T$$

であるとしよう．いま X を

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_n & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in T \qquad X_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix},\ i = 1, \cdots, n$$ の成分がすべて異なり，かついずれも 0 でない

にとる．一般に行列 $X_i = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{R})$ に対して $X_i^- = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ の記号を用いることにする．さて $AXA^{-1} = Y = \begin{pmatrix} X_{k_1}' & & & \\ & \ddots & & \\ & & X_{k_n}' & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ であるとすると $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ は置換である．ただし X_i' は X_i か X_i^- のいずれかを表わすものとする．（このことは $AXA^{-1} = Y$ の両辺の固有多項式 $\det(E\xi - X) = \det(E\xi - Y)$ を求めてみればわかる）．$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ とおいて，まず $AX = YA$ の第 $2n+1$ 行を比較すると

$$\begin{aligned}(\cdots, a_{2n+1\,2i-1}\cos\theta_i + a_{2n+1\,2i}\sin\theta_i, -a_{2n+1\,2i-1}\sin\theta_i + a_{2n+1\,2i}\cos\theta_i, \cdots) \\ = (\cdots, a_{2n+1\,2i-1}, a_{2n+1\,2i}, \cdots)\end{aligned}$$

となる．これより

$$\begin{cases} a_{2n+1\,2i-1}(1-\cos\theta_i) - a_{2n+1\,2i}\sin\theta_i = 0 \\ a_{2n+1\,2i-1}\sin\theta_i + a_{2n+1\,2i}(1-\cos\theta_i) = 0 \end{cases}$$

となるが，$\det\begin{pmatrix} 1-\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & 1-\cos\theta_i \end{pmatrix} = 2(1-\cos\theta_i) \neq 0$ であるから

$$a_{2n+1\ 2i-1} = a_{2n+1\ 2i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

となる．よって A の第 $2n+1$ 行は

$$(0, \cdots, 0, 1), \quad (0, \cdots, 0, -1)$$

のいずれかである．つぎに

$$A = \begin{pmatrix} A_{ji} & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad A_{ji} \in M(2, \boldsymbol{R})$$

とおくと $AX = YA$ より

$$A_{ji}X_i = X_{k_j}{}' A_{ji} \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

となる．補題4.32を用いると

$$X_i = X_{k_j} \quad \text{ならば} \quad A_{ji} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{の形であり}$$

$$X_i = X_{k_j}{}^- \quad \text{ならば} \quad A_{ji} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \text{の形であり}$$

$$X_i \neq X_{k_j}, X_{k_j}{}^- \quad \text{ならば} \quad A_{ji} = 0$$

となるので，結局 A は

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_n & k_1 & k_j & n+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \epsilon_1 A_{1k_1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \epsilon_j A_{jk_j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \epsilon_n A_{nk_n} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array}$$

(j, k_j)-成分が $\epsilon_j A_{jk_j}$ $\left(\epsilon_j = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ A_{ji} \in SO(2)\right)$，$j = 1, \cdots, n$ であって他の成分はすべて0の行列

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_n & k_1 & k_j & n+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdots & \epsilon_1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \epsilon_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \epsilon_n & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \varepsilon \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} A_{\tau(1)1} & & & & \\ & A_{\tau(2)2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{\tau(n)n} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \tau = \begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ k_1 \cdots k_n \end{pmatrix}^{-1} \\ \varepsilon = \det(\epsilon_1 \cdots \epsilon_n) \end{array}$$

の形をしている．この A の形は X のとり方によらない．「たとえば $n = 3$ として

$$
A=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
 & & a & -b & & & \\
 & & b & a & & & \\
\hline
 & & & & c & -d & \\
 & & & & -d & -c & \\
\hline
e & -f & & & & & \\
f & e & & & & & \\
\hline
 & & & & & & -1
\end{array}\right) \leftarrow (\det A=1 \text{ になるように調整})
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & -1 & \\
\hline
1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & -1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
e & -f & & & & & \\
f & e & & & & & \\
\hline
 & & a & -b & & & \\
 & & b & a & & & \\
\hline
 & & & & c & -d & \\
 & & & & d & c & \\
\hline
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
$$

のようである.」さて写像 f: $N_T(SO(2n+1)) \to \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ を

$$
f(A)=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix}^{-1} \qquad \varepsilon_i=\det \epsilon_i
$$

と定義すると, f は群準同型写像になる. そして $Sp(n)$ のとき (定理 4.19 (2)) と同様にすると, f が全射であって, かつ $\operatorname{Ker} f = T$ もわかる. よって写像 $\bar{f}$: $W(SO(2n+1)) = N_T(SO(2n+1))/T \to \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$, $\bar{f}([A]) = f(A)$ は群同型写像である: $W(SO(2n+1)) \cong \mathfrak{S}_n{}^{\pm}$.

(3) $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$-不変多項式 $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$

定 義 $\boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}]$ において, $z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}, 1$ の基本対称式を

$$
\lambda_1', \cdots, \lambda_n', \lambda_{n+1}', \cdots, \lambda_{2n+1}'
$$

で表わす. このとき $\lambda_{2n+1-i}' = \lambda_i'$, $\lambda_{2n+1}' = 1 (= \lambda_0')$ となっている.

なお 153 頁と同様, $z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}$ の基本対称式を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n}$ で表わし, $z_1+z_1{}^{-1}, \cdots, z_n+z_n{}^{-1}$ の基本対称式を $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ で表わしておく. このとき容易にわかるように

$$
\lambda_r' = \lambda_r + \lambda_{r-1} \qquad r=1, \cdots, 2n
$$

がなりたっている. 各 λ_r が $\lambda_r = \sigma_r + \sum_{0 \leq k < r} a_k \sigma_k$, $a_k \in \boldsymbol{Z}$ と表わされる (補題 4.24) こと

を用いるとつぎの補題を得る.

補題 4.34 λ_r', $r=1,\cdots,n$ は $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ を用いて

$$\lambda_r'=\sigma_r+\sum_{0\leq k<r}b_k\sigma_k \qquad b_k\in \boldsymbol{Z}$$

と表わされる. ただし $\sigma_0=1$ とする.

例 4.6 補題4.34の b_k をつぎのように具体的にかくこともできる (例4.4).

$$\lambda_1'=\sigma_1+1$$

$$\lambda_2'=\sigma_2+\sigma_1+n$$

$$\lambda_3'=\sigma_3+\sigma_2+(n-1)\sigma_1+n$$

$$\lambda_4'=\sigma_4+\sigma_3+(n-2)\sigma_2+(n-1)\sigma_1+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_r'=\sigma_r+\sigma_{r-1}+(n-r+2)\sigma_{r-2}+(n-r+3)\sigma_{r-3}+\binom{n-r+4}{2}\sigma_{r-4}$$
$$+\cdots+\binom{n-r+2k}{k}\sigma_{r-2k}+\binom{n-r+2k+1}{k}\sigma_{r-(2k+1)}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n'=\sigma_n+\sigma_{n-1}+2\sigma_{n-2}+3\sigma_{n-3}+\binom{4}{2}\sigma_{n-4}+\binom{5}{2}\sigma_{n-5}+\cdots$$

逆に各 σ_r は $\lambda_1',\cdots,\lambda_n'$ を用いて表わすこともできる. すなわち, つぎのようになる.

$$\sigma_1=\lambda_1'-1$$

$$\sigma_2=\lambda_2'-\lambda_1'-(n-1)$$

$$\sigma_3=\lambda_3'-\lambda_2'-(n-2)\lambda_1'+(n-2)$$

$$\sigma_4=\lambda_4'-\lambda_3'-(n-3)\lambda_2'+(n-3)\lambda_1'+\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

$$\sigma_5=\lambda_5'-\lambda_4'-(n-4)\lambda_3'+(n-4)\lambda_2'+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}\lambda_1'-\frac{(n-3)(n-4)}{2!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_r=(\lambda_r'-\lambda_{r-1}')-(n-r+1)(\lambda_{r-2}'-\lambda_{r-3}')+\binom{n-r+2}{2}(\lambda_{r-4}'-\lambda_{r-5}')$$
$$+\cdots+(-1)^k\binom{n-r+k}{k}(\lambda_{r-2k}'-\lambda_{r-2k-1}')+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=(\lambda_n'-\lambda_{n-1}')-(\lambda_{n-2}'-\lambda_{n-3}')+\cdots+(-1)^k(\lambda_{n-2k}'-\lambda_{n-2k-1}')+\cdots$$

補題4.34を用いると，命題4.25と同様にしてつぎの命題を得る．

命題 4.35　$Z[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ において $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ は代数的独立であり，かつ

$$Z[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]=Z[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$$

がなりたつ．

(4)　$SO(2n+1)$-C-加群 $(R^{2n+1})^C$

$2n+1$ 次元 R-加群 R^{2n+1} は $SO(2n+1)$-R-加群であった (例2.1)．したがって，その複素化 $(R^{2n+1})^C$ は $SO(2n+1)$-C-加群になる．T を定理4.33(1) に示した $SO(2n+1)$ の極大トーラスとし，$j\colon T\to SO(2n+1)$ を包含写像とする．$(R^{2n+1})^C$ を T-C-加群とみて，既約 T-C-加群の直和に分解しよう．

補題 4.36　　$$j^*((R^{2n+1})^C)=W_1\oplus\hat{W}_1\oplus\cdots\oplus W_n\oplus\hat{W}_n\oplus C$$

ここに W_i, $i=1, \cdots, n$ は基本既約 T-C-加群であり，$\hat{W}_i$ は W_i の双対 T-C-加群とする．

証明　R^{2n+1} に標準基 $e_1, \cdots, e_{2n}, e_{2n+1}$ をとり

$$u_i=e_{2i-1}\otimes 1-e_{2i}\otimes i,\qquad \hat{u}_i=-e_{2i-1}\otimes i+e_{2i}\otimes 1\qquad i=1, \cdots, n$$
$$h=e_{2n+1}\otimes 1$$

とおくと $u_1, \hat{u}_1, \cdots, u_n, \hat{u}_n, h$ は $(R^{2n+1})^C$ の C-基になる．そして $t=t(\theta_1, \cdots, \theta_n)\in T$ に対して

$$tu_i=u_ie^{i\theta_i},\qquad t\hat{u}_i=\hat{u}_ie^{-i\theta_i}\qquad i=1, \cdots, n$$
$$th=h$$

がなりたつ．実際，

$$\begin{aligned}tu_i&=te_{2i-1}\otimes 1-te_{2i}\otimes i\\&=(e_{2i-1}\cos\theta_i+e_{2i}\sin\theta_i)\otimes 1-(-e_{2i-1}\sin\theta_i+e_{2i}\cos\theta_i)\otimes i\\&=e_{2i-1}\otimes\cos\theta_i+e_{2i}\otimes\sin\theta_i+e_{2i-1}\otimes i\sin\theta_i-e_{2i}\otimes i\cos\theta_i\\&=e_{2i-1}\otimes(\cos\theta_i+i\sin\theta_i)-e_{2i}\otimes i(\cos\theta_i+i\sin\theta_i)\\&=(e_{2i-1}\otimes 1-e_{2i}\otimes i)(\cos\theta_i+i\sin\theta_i)\\&=u_ie^{i\theta_i}\end{aligned}$$

となる．同様に $t\hat{u}_i=\hat{u}_ie^{-i\theta_i}$ が示される．また $th=h$ は自明である．よって $u_1, \hat{u}_1, \cdots, u_n, \hat{u}_n, h$ より生成される $(R^{2n+1})^C$ の1次元部分 C-加群をそれぞれ $W_1, \hat{W}_1, \cdots, W_n, \hat{W}_n, C$ とすると補題を得る．

$$\begin{array}{ccc} M(SO(2n+1)) & \xrightarrow{j^{\#}} & M(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{SO(2n+1)}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_T} \\ R(SO(2n+1)) & \xrightarrow{j^{*}} & R(T) \end{array}$$

$$\phi_T(W_i) = z_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと

$$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$$

であった（定理 3.19）．さて補題 4.36 を用いて命題 4.5，4.27 と同じようにすると，$R(T)$ においてつぎの命題を得る．

命題 4.37 $\quad j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C)) = \lambda_r' \qquad r = 1, \cdots, n, (n+1, \cdots, 2n+1)$

ここに $\lambda_1', \cdots, \lambda_n', (\lambda_{n+1}', \cdots, \lambda_{2n+1}')$ は $z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}$, 1 の基本対称式とする．

（5） $SO(2n+1)$ の複素表現環

$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$ に Weyl 群 $W(SO(2n+1)) \cong \mathfrak{S}_n^{\pm} \cong (S^0)^n\mathfrak{S}_n$（命題 4.17）が働いており，$W(SO(2n+1))$ の $R(T)$ への作用は，$Sp(n)$ のときと同様，変換 $z_i \to z_i^{-1}$, $i = 1, \cdots, n$ および $z_1, \cdots, z_n$ の置換より合成されている（定理 4.33 の証明参照）．さて $R(SO(2n+1))$ は $(\boldsymbol{R}^{2n+1})^C$ よりつくられた n 個の元 $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ をもっている．そして

$$\begin{aligned} R(SO(2n+1)) \subset R(T)^{W(SO(2n+1))} &= (R(T)^{(S^0)^n})^{\mathfrak{S}_n} \text{（補題 1.52）} \\ &= (\boldsymbol{Z}[z_1 + z_1^{-1}, \cdots, z_n + z_n^{-1}])^{\mathfrak{S}_n} \text{（命題 4.23）} \\ &= \boldsymbol{Z}[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \text{（命題 4.3 (3)）} \\ &= \boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n'] \text{（命題 4.35）} \subset R(SO(2n+1)) \end{aligned}$$

となるので，この包含関係 $\subset$ は等号 $=$ となる．すなわち

$$R(SO(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$$

がなりたつ．以上よりつぎの定理を得る．

定理 4.38 $SO(2n+1)$ の複素表現環 $R(SO(2n+1))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$ に環同型である：

$$R(SO(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \cdots, \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C)]$$

（6） $SO(2n+1)$ の実表現環

$SO(2n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ よりつくられた n 個の $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群

$$\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{2n+1}), \cdots, \Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n+1})$$

の複素化 $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \cdots \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C)$（命題 2.19 (5)）を含む類が $R(SO(2n+1))$ の環としての生成元であった（定理 4.38）．すなわち $R(SO(2n+1))$ の環としての各生成元に $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群の複素化 $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群を選ぶ

ことができた．よって命題3.4より $SO(2n+1)$ の実表現環が決定される．

定理4.39 $SO(2n+1)$ の実表現環 $RO(SO(2n+1))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$ に環同型である：

$$RO(SO(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{2n+1}), \cdots, \Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n+1})]$$

(7) $SO(2n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{B}_n$

$$\mathfrak{B}_n = \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{R}) \mid {}^tX = -X\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{B}_n$ は $n(2n+1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{B}_n$ を $SO(2n+1)$ の Lie 環という．$\mathfrak{B}_n$ が $n(2n+1)$ 次元であることは，その $\boldsymbol{R}$-基として

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad i < j$$

（1 は第 i 行第 j 列，-1 は第 j 行第 i 列）

を選ぶことができるからである．$A \in SO(2n+1)$, $X \in \mathfrak{B}_n$ ならば $AXA^{-1} \in \mathfrak{B}_n$ であるから，$\mathfrak{B}_n$ における $A \in SO(2n+1)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{B}_n$$

と定義すると，$\mathfrak{B}_n$ は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化

$$\mathfrak{B}_n{}^C \cong \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{C}) \mid {}^tX = -X\}$$

は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群になる．この $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{B}_n{}^C$ を調べるのであるが，そのためにはつぎの $\mathfrak{B}_n{}'$ を調べる方が考察し易いかもしれない．

$$S = \left.\begin{pmatrix} S' & & & \\ & \ddots & & \\ & & S' & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right\} n \qquad S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし

$$\mathfrak{B}_n{}' = \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{C}) \mid {}^tXS = -SX\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{B}_n{}'$ は $\boldsymbol{C}$-Lie 環になる．

$$P = \left.\begin{pmatrix} P' & & & \\ & \ddots & & \\ & & P' & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right\} n \qquad P' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

とおくと ${}^tPP=S$ となっている．$A\in SO(2n+1)$，$X\in\mathfrak{B}_n'$ ならば $(P^{-1}AP)X(P^{-1}AP)^{-1}\in\mathfrak{B}_n'$ であるから，$\mathfrak{B}_n'$ における $A\in SO(2n+1)$ の作用を

$$A\cdot X=(P^{-1}AP)X(P^{-1}AP)^{-1}\qquad X\in\mathfrak{B}_n'$$

と定義すると，$\mathfrak{B}_n'$ は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群になる．そして，つぎの補題がなりたつ．

補題 4.40 $\mathfrak{B}_n{}^C$ と $\mathfrak{B}_n'$ は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群として（また $\boldsymbol{C}$-Lie 環としても）同型である：$\mathfrak{B}_n{}^C\cong\mathfrak{B}_n'$.

証 明 まず $X\in\mathfrak{B}_n{}^C$ ならば $P^{-1}XP\in\mathfrak{B}_n'$ である．実際，

$${}^t(P^{-1}XP)S={}^tP{}^tX{}^tP^{-1}{}^tPP={}^tP{}^tXP={}^tP(-X)P=-{}^tPPP^{-1}XP=-S(P^{-1}XP)$$

となるからである．さて写像 $f:\mathfrak{B}_n{}^C\to\mathfrak{B}_n'$ を

$$f(X)=P^{-1}XP\qquad X\in\mathfrak{B}_n{}^C$$

と定義すると，f は $\boldsymbol{C}$-同型写像であって

$$f(A\cdot X)=A\cdot f(X)\qquad A\in SO(2n+1),\ X\in\mathfrak{B}_n{}^C$$

をみたしている．実際，$f(A\cdot X)=f(AXA^{-1})=P^{-1}(AXA^{-1})P=(P^{-1}AP)(P^{-1}XP)(P^{-1}AP)^{-1}=A\cdot f(X)$ である．よって f は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-同型写像である：$\mathfrak{B}_n{}^C\cong\mathfrak{B}_n'$.（さらに $f([X,\ Y])=[f(X),\ f(Y)]$, $X,\ Y\in\mathfrak{B}_n{}^C$ もみたすから，f は $\boldsymbol{C}$-Lie 環同型写像でもある）.

行列 $X\in M(2n+1,\ \boldsymbol{C})$ が $\mathfrak{B}_n'$ に属するためには，X が

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} & z_1 \\ Y_{12}' & X_2 & \cdots & Y_{2n} & z_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ Y_{1n}' & Y_{2n}' & \cdots & X_n & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_i=\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}\in M(2,\ \boldsymbol{C})\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

$$Y_{ij}=\begin{pmatrix} u & v \\ \hat{v} & \hat{u} \end{pmatrix}\in M(2,\ \boldsymbol{C})\ \ \text{に対して}\ \ Y_{ij}'=\begin{pmatrix} -\hat{u} & -v \\ -\hat{v} & -u \end{pmatrix}\qquad i<j$$

$$z_i=\begin{pmatrix} w \\ \hat{w} \end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^2\ \ \text{に対して}\ \ z_i'=(-\hat{w},\ -w)\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

の形の行列であることが必要十分であることが実際に計算するとわかる．この行列の形からつぎの補題が導かれる．

補題 4.41　$j^*(\mathfrak{B}_n{}') = \overbrace{C \oplus \cdots \oplus C}^{n} \oplus \bigoplus_{i<j}((W_i \otimes \hat{W}_j) \oplus (\hat{W}_i \otimes W_j))$

$$\oplus \bigoplus_{i<j}((W_i \otimes W_j) \oplus (\hat{W}_i \otimes \hat{W}_j)) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n}(W_i \oplus \hat{W}_i)$$

証明　$\mathfrak{B}_n{}'$ に C-基をつぎのように選ぶ.

$$h_i = E_{2i-1\,2i-1} - E_{2i\,2i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$u_{ij} = E_{2i-1\,2j-1} - E_{2j\,2i}, \qquad \hat{u}_{ij} = E_{2i\,2j} - E_{2j-1\,2i-1} \qquad i < j$$

$$v_{ij} = E_{2i-1\,2j} - E_{2j-1\,2i}, \qquad \hat{v}_{ij} = E_{2i\,2j-1} - E_{2j\,2i-1} \qquad i < j$$

$$w_i = E_{2i-1\,2n+1} - E_{2n+1\,2i}, \qquad \hat{w}_i = E_{2i\,2n+1} - E_{2n+1\,2i-1} \qquad i = 1, \cdots, n$$

このとき $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$t \cdot h_i = h_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$t \cdot u_{ij} = u_{ij}e^{i(\theta_i - \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij}e^{-i(\theta_i - \theta_j)} \qquad i < j$$

$$t \cdot v_{ij} = v_{ij}e^{i(\theta_i + \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{v}_{ij} = \hat{v}_{ij}e^{-i(\theta_i + \theta_j)} \qquad i < j$$

$$t \cdot w_i = w_i e^{i\theta_i}, \qquad t \cdot \hat{w}_i = \hat{w}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

がなりたつ. 実際,

$$P'^{-1}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}P' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

であることに注意すると

$$t \cdot u_{ij} = (P^{-1}tP)u_{ij}(P^{-1}tP)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & & & \\ & e^{-i\theta_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{i\theta_n} & & \\ & & & & e^{-i\theta_n} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2i-1 \\ 2j \\ \\ \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 2i & \quad 2j-1 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & & & & & \\ & e^{i\theta_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e^{-i\theta_n} & & \\ & & & & e^{i\theta_n} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 2i-1 \\ \\ 2j \end{matrix} \overset{\begin{matrix} 2i & \qquad 2j-1 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & e^{i(\theta_i - \theta_j)} & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -e^{i(\theta_i - \theta_j)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}} = u_{ij}e^{i(\theta_i - \theta_j)}$$

となる. 他の式も同様な計算で容易に確かめられるので, これらの式から補題を得る.

定理 4.42 $R(SO(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$ ($RO(SO(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_n']$) において

$$j^*(\mathfrak{B}_n{}^C) = \lambda_2' \qquad (j^*(\mathfrak{B}_n) = \lambda_2')$$

となる.

証 明 $j^*(\mathfrak{B}_n{}^C) = j^*(\mathfrak{B}_n')$ (補題 4.40)

$$= n + \sum_{i<j} (z_i z_j{}^{-1} + z_i{}^{-1} z_j + z_i z_j + z_i{}^{-1} z_j{}^{-1}) + \sum_{i=1}^{n} (z_i + z_i{}^{-1}) \quad (\text{補題 } 4.41)$$

$$= \lambda_2'$$

である. $j^*(\mathfrak{B}_n) = \lambda_2'$ は, 複素化写像 c: $RO(SO(2n+1)) \to R(SO(2n+1))$ が環同型である (命題 3.4) から, $j^*(\mathfrak{B}_n{}^C) = \lambda_2'$ より導かれる.

例 4.7 $\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R}) = \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{R}) \mid {}^tX = X\}$

は $(n+1)(2n+1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり, $A \in SO(2n+1)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})$$

と定義すると, $\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})$ は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる. したがって, その複素化

$$\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})^C \cong \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{C}) \mid {}^tX = X\} = \mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{C})$$

は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群である. この $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})^C$ は $R(SO(2n+1))$ において

$$j^*(\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})^C) = \lambda_1'^2 - \lambda_2'$$

となる. これを示すためには, $\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})^C$ の代りに $\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{C}) = \{X \in M(2n+1, \boldsymbol{C}) \mid {}^tXS = SX\}$ を考えて, $\mathfrak{C}_n{}^C$ のときと同じようにして証明するとよい. また $RO(SO(2n+1))$ においても $j^*(\mathfrak{S}(2n+1, \boldsymbol{R})) = \lambda_1'^2 - \lambda_2'$ となる.

§5. スピノル群 $Spin(2n+1)$

スピノル群 $Spin(n)$ を定義する前に, 回転群 $SO(n)$ について簡単な約束をしておこう. V を内積をもつ n 次元 $\boldsymbol{R}$-加群とする. $\boldsymbol{R}$-同型写像 x: $V \to V$ が

$$(x(u), x(v)) = (u, v) \qquad u, v \in V$$

をみたすとき, x を V の**直交写像**という. V の直交写像全体の集合を $O(V)$ で表わすと, $O(V)$ は写像の合成の積により群をつくる. この群 $O(V)$ は直交群 $O(n)$ と群同型である. 実際, V に正規直交 $\boldsymbol{R}$-基 $e_1, \cdots, e_n$ をとり, $x \in O(V)$ が

$$x(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji} \qquad i = 1, \cdots, n$$

であるとして，x に対して行列 $A=\left(a_{ji}\right)\in O(n)$ を対応させると，この対応により $O(V)$ と $O(n)$ は群同型になる．この同型対応により $O(n)$ の位相を $O(V)$ に導入すると，当然 $O(V)$ は $O(n)$ と位相群として同型になるが，$O(V)$ を $O(n)$ と前記の方法により同一視することにする：

$$O(V)=O(n)$$

なおこの同一視は V の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基 $e_1,\cdots,e_n$ を定めると決定するのであるが，V が $\boldsymbol{R}^n$ であるときには標準基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を用いるものとする．同様に $O(V)$ の部分群

$$SO(V)=\{x\in O(V)\mid\det x=1\}$$

を回転群 $SO(n)$ と同一視する．

(1) $Spin(n)$ の位相的性質

Clifford $\boldsymbol{R}$-多元環 $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ において，$n-1$ 次元球面 S^{n-1} を $S^{n-1}=\{a\in\boldsymbol{R}_-{}^n\mid\langle a,a\rangle=-1\}$ にとる．さて

$$Spin(n)=\{x\in C(\boldsymbol{R}_-{}^n)\mid x=a_1\cdots a_m,\ a_i\in S^{n-1},\ m=2,4,\cdots\}$$

は $C(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ における積および位相を用いると位相群になる．この位相群 $Spin(n)$ を**スピノル群**という．$Spin(n)$ についての詳しいことは [21] にゆずることにして，ここでは簡単に述べておくにとどめる．$SO(n)$ を $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}_-{}^n$ における回転群とし：$SO(n)=SO(\boldsymbol{R}_-{}^n)$，写像 p: $Spin(n)\to SO(n)$ を

$$p(x)u=xu{}^tx \qquad x\in Spin(n),\quad u\in\boldsymbol{R}_-{}^n$$

と定義すると p は連続な全射群準同型写像であり（この p を**被覆群準同型写像**という），その核は $S^0=\{1,-1\}$ となる．よって位相群の同型

$$Spin(n)/S^0\cong SO(n)$$

を得る．そして，つぎの定理がなりたつ（[21] 定理 64, 65）．

定理 4.43 (1) $Spin(1)$, $Spin(2)$ はそれぞれ S^0, S^1 と位相群として同型である：

$$Spin(1)\cong S^0 \qquad Spin(2)\cong S^1$$

(2) $Spin(n)$ $(n\geqq 3)$ は単連結なコンパクト $n(n-1)/2$ 次元 Lie 群である．

(2) $Spin(2n+1)$ の極大トーラスと Weyl 群

定理 4.44

(1) $$\tilde{T}=\left\{\tilde{t}=\tilde{t}(\theta_1)\cdots\tilde{t}(\theta_n)\in C(\boldsymbol{R}_-{}^{2n+1})\;\middle|\;\begin{array}{l}\tilde{t}(\theta_i)=\cos\theta_i+e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta_i\\ \theta_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,\cdots,n\end{array}\right\}$$

は $Spin(2n+1)$ の極大トーラスである．したがって $Spin(2n+1)$ の階数は n であ

る：rank $Spin(2n+1)=n$.

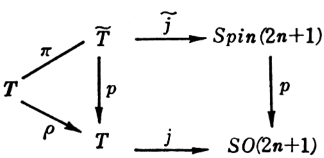
（2） $Spin(2n+1)$ の Weyl 群は群 $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ に群同型である：

$$W(Spin(2n+1)) \cong W(SO(2n+1)) \cong \mathfrak{S}_n^{\pm}$$

証 明 $\boldsymbol{T}=S^1\times\cdots\times S^1$ を（標準的な）n 次元トーラスとし，写像 π: $\boldsymbol{T}\to\tilde{T}$ を

$$\pi(e^{i\theta_1},\ \cdots,\ e^{i\theta_n})=\tilde{t}(\theta_1)\cdots\tilde{t}(\theta_n)$$

と定義すると π は連続な全射群準同型写像である．このことから $\tilde{T}$ がトーラスであることがわかる（127頁）．$\tilde{T}$ が n 次元であることは，π の核が有限であること（補題 4.48 (1)）からわかるし，またつぎに述べる事実：p: $\tilde{T}\to T$ が被覆（群準同型）写像であることからでもわかる[†]．$\tilde{T}$ が極大であることを示そう．定理 4.33 (1) に示した $SO(2n+1)$ の極大トーラスを T で表わすことにする．このとき被覆群準同型写像 p: $Spin(2n+1)\to SO(2n+1)$ は全射群準同型写像



$$p:\tilde{T}\to T$$

を誘導する．実際，

$$p(\cos\theta_i+e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta_i)=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\begin{pmatrix}\cos 2\theta_i&-\sin 2\theta_i\\ \sin 2\theta_i&\cos 2\theta_i\end{pmatrix}&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}$$

となる（[21] 例 168）からである．さて $x\in Spin(2n+1)$ を与える．T は $SO(2n+1)$ の極大トーラスであるから，$p(x)\in SO(2n+1)$ に対して $A\in SO(2n+1)$, $t\in T$ が存在して

$$p(x)=AtA^{-1} \qquad \text{(i)}$$

とかける．p: $Spin(2n+1)\to SO(2n+1)$ および p: $\tilde{T}\to T$ は全射であるから，$a\in$

---

† $\tilde{T}$ が n 次元トーラスであることの直接の証明をつぎのようにしてもよい．写像 f: $\boldsymbol{T}\to\tilde{T}$ を

$$f(e^{i\theta_1},\ \cdots,\ e^{i\theta_n})=\tilde{t}\Big(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\Big)\cdots\tilde{t}\Big(\frac{\theta_{n-1}+\theta_n}{2}\Big)\tilde{t}\Big(\frac{\theta_n+(-1)^{n-1}\theta_1}{2}\Big)$$

と定義すると，f は位相群の同型を与えている．

$Spin(2n+1)$, $\tilde{t} \in \tilde{T}$ をそれぞれ $p(a)=A$, $p(\tilde{t})=t$ となるようにとると, (i) 式は $p(x)=p(a)p(\tilde{t})(p(a))^{-1}=p(a\tilde{t}a^{-1})$ となる. しかるに $\mathrm{Ker}\,p=\{1, -1\}$ であるから, x は

$$x=a\tilde{t}a^{-1} \quad \text{または} \quad x=-a\tilde{t}a^{-1}$$

のいずれかになる. 後者の場合には, $\tilde{t} \in \tilde{T}$ ならば $-\tilde{t} \in \tilde{T}$ であることに注意するならば, いずれの場合にも, $x \in Spin(2n+1)$ はある $a \in Spin(2n+1)$ により $x \in a\tilde{T}a^{-1}$ とすることができる. よって

$$Spin(2n+1)=\bigcup_{a \in Spin(2n+1)} a\tilde{T}a^{-1}$$

となる. すなわち $\tilde{T}$ は $Spin(2n+1)$ の極大トーラスである. この $\tilde{T}$ は $\tilde{T}=p^{-1}(T)$ となっていることに注意しよう.

(2) 被覆群準同型写像 $p: Spin(2n+1) \to SO(2n+1)$ は全射群準同型写像

$$p: N_{\tilde{T}}=N_{\tilde{T}}(Spin(2n+1)) \to N_T=N_T(SO(2n+1))$$

を誘導する. 実際, まず $a \in N_{\tilde{T}}$ ならば $A=p(a) \in N_T$ であることを示そう. $t \in T$ に対して, $p: \tilde{T} \to T$ が全射であるから, $p(\tilde{t})=t$ となる $\tilde{t} \in \tilde{T}$ をとる. このとき $AtA^{-1}=p(a)p(\tilde{t})(p(a))^{-1}=p(a\tilde{t}a^{-1}) \in p(\tilde{T})=T$ となるから $A \in N_T$ である. つぎに $p: N_{\tilde{T}} \to N_T$ が全射であることを示そう. $A \in N_T$ を与える. $p: Spin(2n+1) \to SO(2n+1)$ が全射であるから, $p(a)=A$ となる $a \in Spin(2n+1)$ をとる. このとき, すべての $\tilde{t} \in \tilde{T}$ に対して $p(a\tilde{t}a^{-1})=p(a)p(\tilde{t})(p(a))^{-1} \in ATA^{-1} \subset T=p(\tilde{T})$ となる. よって $a\tilde{t}a^{-1} \in \tilde{T}$ となり $a \in N_{\tilde{T}}$ である. したがって $p: N_{\tilde{T}} \to N_T$ は全射である. そして

$$p^{-1}(T)=\tilde{T}$$

であるから, 写像 $\bar{p}: N_{\tilde{T}}/\tilde{T} \to N_T/T$, $\bar{p}([a])=[p(a)]$ は群同型写像である: $N_{\tilde{T}}/\tilde{T} \cong N_T/T$. すなわち $W(Spin(2n+1)) \cong W(SO(2n+1)) \cong \mathfrak{S}_n^{\pm}$ (定理 4.33 (2)) を得る.

(3) $Spin(n)$-K-加群

補題 4.45 V を $Spin(n)$-K-加群とする. $-1 \in Spin(n)$ に対して

$$V_1=\{u \in V \mid (-1)u=u\},\ V_{-1}=\{u \in V \mid (-1)u=-u\}$$

とおくと V_1, V_{-1} は V の部分 $Spin(n)$-K-加群であって, V は V_1 と V_{-1} の直和になる:

$$V=V_1 \oplus V_{-1}$$

証明 $-1 \in Spin(n)$ は $(-1)^2=1$ をみたすので, V は V_1 と V_{-1} の K-加群として

の直和になる：$V = V_1 \oplus V_{-1}$（補題1.7(1)）．しかるに $-1 \in Spin(n)$ は $Spin(n)$ のすべての元と可換である：

$$(-1)x = x(-1) \qquad x \in Spin(n)$$

から，V_1, V_{-1} は $Spin(n)$-K-加群になる．実際，$x \in Spin(n)$ に対して

$$u \in V_1 \quad \text{ならば} \quad (-1)(xu) = ((-1)x)u = (x(-1))u = x((-1)u) = xu$$

$$u \in V_{-1} \quad \text{ならば} \quad (-1)(xu) = \cdots = x((-1)u) = x(-u) = -xu$$

となるからである．よって $V = V_1 \oplus V_{-1}$ は $Spin(n)$-K-加群の直和である．

$SO(n)$-K-加群 V に対して，被覆群準同型写像 p: $Spin(n) \to SO(n)$ よりひきおこされる $Spin(n)$-K-加群 $p^{\sharp}(V)$ を定義することができる．特に $\boldsymbol{R}^n$ は $x \in Spin(n)$ の作用

$$x\boldsymbol{a} = p(x)\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$$

により $Spin(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群である．$Spin(n)$ は Clifford $\boldsymbol{R}$-多元環 $C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ に含まれる群である．すなわち $Spin(n)$ における積は $C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ における積に一致している．さらに $C^0(\boldsymbol{R}_-{}^n)$ は $C(\boldsymbol{R}_-{}^{n-1})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型であった（命題1.48）から，両者を同一視すると，つぎの包含関係を得る．

$$Spin(n) \subset C(\boldsymbol{R}_-{}^{n-1})$$

したがって $C(\boldsymbol{R}_-{}^{n-1})$-$\boldsymbol{R}$-加群 V は（自然な方法で）$Spin(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群とみることができる．また，それらの複素化を考えることにより，$C(\boldsymbol{C}_-{}^{n-1})$-$\boldsymbol{C}$-加群 V は $Spin(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群とみなすこともできる．そして，これらのことに関してつぎの補題がなりたつ．

補題 4.46 (1) $Spin(n)$-K-加群 V が，ある $SO(n)$-K-加群 V' を用いて，被覆群準同型写像 p: $Spin(n) \to SO(n)$ よりひきおこされている：$V = p^{\sharp}(V')$ のための必要十分条件は，$-1 \in Spin(n)$ に対して

$$(-1)u = u \qquad u \in V$$

がなりたつことである．

(2) $Spin(n)$-K-加群 V が $C(K_-{}^{n-1})$-K-加群とみなせるための必要十分条件は，$-1 \in Spin(n)$ に対して

$$(-1)u = -u \qquad u \in V$$

がなりたつことである．

証明 (1) $Spin(n)$-K-加群 V が$(-1)u = u$, $u \in V$ の条件をみたしているとする．$A \in SO(n)$ に対して $p(a) = A$ をみたす $a \in Spin(n)$ をとり，V における $A \in SO(n)$ の作用を

$$Au = au \qquad u \in V$$

と定義する．A に対して $p(a) = A$ となる a は a と $-a$ の2通りあるが，(1) の条件よりこの定義は a のとり方によらない．なお $SO(n)$ の V へのこの作用が連続であることは，$p: Spin(n) \to SO(n)$ が被覆写像（局所同相）であることからわかる．そして V は $SO(n)$-K-加群 V' になり，$V = p^*(V')$ である．逆に $Spin(n)$-K-加群 V が $V = p^*(V')$, V' は $SO(n)$-K-加群であるときには，$(-1)u = p(-1)u = Eu = u$, $u \in V$ をみたしている．

（2） $-1 \in Spin(n)$ は $C(K_-^{n-1})$ においては $-1 = 1(-1)$（右辺の -1 は $-1 \in K$）であるから，$Spin(n)$-K-加群 V が $C(K_-^{n-1})$-K-加群から導かれているときには $(-1)u = 1((-1)u) = -u$ である．逆に $Spin(n)$-K-加群 V がこの条件をもつとするとき，V における $e_i \in C(K_-^{n-1})$, $i = 1, \cdots, n-1$ の作用を

$$e_i u = (e_i e_n)u \qquad u \in V$$

と定義する（さらに $(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r})u = e_{i_1}(e_{i_2} \cdots (e_{i_r} u))$；$(au)\alpha = a(u\alpha)$, $a \in C(K_-^{n-1})$, $\alpha \in K$ と定義する）と，V は $C(K_-^{n-1})$-K-加群になる．

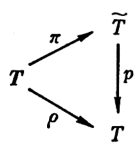
補題 4.45, 4.46 はつぎのことを示している．

命題 4.47 任意の $Spin(n)$-K-加群 V は，$SO(n)$-K-加群から導かれる $Spin(n)$-K-加群 V_1 と $C(K_-^{n-1})$-K-加群から誘導される $Spin(n)$-K-加群 V_{-1} の直和に分解される：

$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$

（4） $\tilde{T}$-C-加群と $R(\tilde{T})$

$\boldsymbol{T}$, $\tilde{T}$, T, π, p の記号を (2) 節と同様とし，$\rho = p\pi$ とおく．つぎの補題は容易である．



補題 4.48 （1） 全射群準同型写像 $\pi: \boldsymbol{T} \to \tilde{T}$ の核は

$$\mathrm{Ker}\,\pi = \{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1\}$$

である．

（2） $\rho: \boldsymbol{T} \to T$ は

$$\rho(1, \cdots, 1, e^{i\theta_i}, 1, \cdots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \cos 2\theta_i & -\sin 2\theta_i \\ \sin 2\theta_i & \cos 2\theta_i \end{pmatrix} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

をみたす連続な全射群準同型写像である.

$\boldsymbol{W}_1, \cdots, \boldsymbol{W}_n$ を基本既約 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とし, $\phi(\boldsymbol{W}_i) = z_i^{1/2}$ とおくと

$$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1^{1/2}, z_1^{-1/2}, \cdots, z_n^{1/2}, z_n^{-1/2}]$$

であった (定理 3.19). そして補題 4.48 (2) より $\rho^*: R(T) \to R(\boldsymbol{T})$ は

$$\rho^*(z_i) = (z_i^{1/2})^2 \qquad i = 1, \cdots, n$$

をみたす単射環準同型写像であることがわかる.

補題 4.49 $\pi^*: R(\tilde{T}) \to R(\boldsymbol{T})$

は単射 (環準同型写像) である. したがって $R(Spin(2n+1))$ を $R(\boldsymbol{T})$ の部分環とみなすことができる:

$$R(Spin(2n+1)) \subset R(\tilde{T}) \subset R(\boldsymbol{T})$$

証明 $\pi: \boldsymbol{T} \to \tilde{T}$ は全射群準同型写像であるから当然補題 3.10 の条件をみたしている. したがって $\pi^*: R(\tilde{T}) \to R(\boldsymbol{T})$ は単射である.

$R(Spin(2n+1))$ の構造を調べるのに, それを $R(\tilde{T})$ の部分環とみるよりも, $R(\boldsymbol{T})$ の部分環とみなして考察する方が計算の便がよいので, 本章では $R(\tilde{T})$ の構造を直接用いることはほとんどない. それでも $R(\tilde{T})$ を $R(\boldsymbol{T})$, $R(T)$ の関係のもとに調べておこう.

$W_1, \cdots, W_n, W$ を 1 次元 $\boldsymbol{C}$-加群とし, $\tilde{t} = \tilde{t}(\theta_1)\cdots\tilde{t}(\theta_n) \in \tilde{T}$ の作用をそれぞれ

$$\tilde{t}w_i = w_i e^{2i\theta_i} \qquad w_i \in W_i,\ i = 1, \cdots, n$$
$$\tilde{t}w = we^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)} \qquad w \in W$$

と定義すると, いずれも $\tilde{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群になる. そして

$$\pi^*(W_i) = \boldsymbol{W}_i \otimes \boldsymbol{W}_i$$
$$\pi^*(W) = \boldsymbol{W}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{W}_n$$

である. さて $\phi(W_i) = z_i$, $\phi(W) = (z_1\cdots z_n)^{1/2}$† とおくとき, つぎの命題を得る.

命題 4.50 $R(\tilde{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}, (z_1\cdots z_n)^{1/2}]$

証明 V を $\tilde{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とする. $-1 \in \tilde{T}$ は $(-1)^2 = 1$ をみたすので

$$V_1 = \{u \in V \mid (-1)u = u\},\ V_{-1} = \{u \in V \mid (-1)u = -u\}$$

とおくと, V_1, V_{-1} は $\tilde{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群であって

$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$

---

† $R(\tilde{T})$ においては, $(z_1\cdots z_n)^{1/2}$ は $((z_1\cdots z_n)^{1/2})^2 = z_1\cdots z_n$ をみたす元にすぎず, これを $R(\boldsymbol{T})$ の元とみなすと $(z_1\cdots z_n)^{1/2} = z_1^{1/2}\cdots z_n^{1/2}$ となる.

となり，V_1 は T-$\boldsymbol{C}$-加群とみなすことができる（証明は補題 4.45, 4.46 と同様）. $V_2 = V_{-1} \otimes \hat{W}$ を考えると $(-1)(u \otimes \hat{w}) = u \otimes \hat{w}$ となるので，V_2 は T-$\boldsymbol{C}$-加群とみなすことができる．したがって $\tilde{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群の同型

$$V \cong V_1 \oplus (V_2 \otimes W)$$

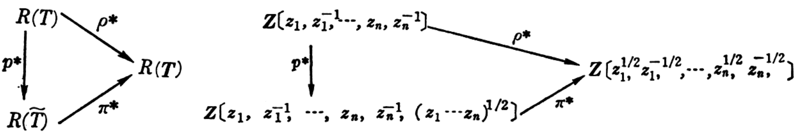
を得る．$R(\tilde{T})$ の元は $\tilde{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群 V, V' を用いて $[V]-[V']$ と表わされる（命題 1.1 (2)）ので，$R(\tilde{T})$ の元は

$$a + b(z_1 \cdots z_n)^{1/2} \qquad a, b \in R(T)$$

すなわち

$$\sum \alpha_{r_1 \cdots r_n \varepsilon} z_1^{r_1} \cdots z_n^{r_n} (z_1 \cdots z_n)^{\varepsilon/2} \qquad \alpha, r_i \in \boldsymbol{Z}, \varepsilon = 0, 1$$

と表わされる．この表し方が 1 意的であることは，単射 π^*（補題 4.49）を施して $R(\boldsymbol{T})$ の元とみなして考えるとわかる．以上で命題が証明された．



(5) $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 Δ_{2n+1}

Clifford $\boldsymbol{C}$-多元環 $C(\boldsymbol{C}_-^{2n})$ は $M(2^n, \boldsymbol{C})$ に $\boldsymbol{C}$-多元環として同型である（命題 1.47 (2)）．そして $M(2^n, \boldsymbol{C})$ はただ 1 つの既約 $M(2^n, \boldsymbol{C})$-$\boldsymbol{C}$-加群 Δ_{2n+1} をもっていた（命題 2.57）．この Δ_{2n+1} について調べよう．

Clifford $\boldsymbol{C}$-多元環 $C(\boldsymbol{C}_-^{2n})$ において，元 c_{2k-1}, $k = 1, \cdots, n$ を

$$c_{2k-1} = e_1 e_2 \cdots e_{2k-1} \boldsymbol{i}^k$$

と定義する．

補題 4.51 (1) $c_{2k-1}{}^2 = 1$

(2) c_{2k-1} は $C(\boldsymbol{C}_-^{2k-1})$ の中心の元である．すなわち c_{2k-1} はすべての $C(\boldsymbol{C}^{-2k-1})$ の元と可換である：

$$c_{2k-1} a = a c_{2k-1} \qquad a \in C(\boldsymbol{C}_-^{2k-1})$$

証明 (1) 一般に $(e_1 e_2 \cdots e_{2k-1})^2 = (-1)^k$ であることに注意すると

$$c_{2k-1}{}^2 = (e_1 e_2 \cdots e_{2k-1})^2 \boldsymbol{i}^{2k} = (-1)^k (-1)^k = 1$$

となる．

(2) c_{2k-1} が e_i, $i = 1, \cdots, 2k-1$ と可換であることを示すと十分である．さて

$$c_{2k-1}e_i = (e_1\cdots e_i\cdots e_{2k-1})\boldsymbol{i}^k e_i = (-1)^{2k-1-i}e_1\cdots e_{i-1}e_i{}^2e_{i+1}\cdots e_{2k-1}\boldsymbol{i}^k$$
$$= (-1)^{2k-i}e_1\cdots e_{i-1}e_{i+1}\cdots e_{2k-1}\boldsymbol{i}^k$$

であり，一方

$$e_ic_{2k-1} = e_i(e_1\cdots e_i\cdots e_{2k-1})\boldsymbol{i}^k = (-1)^{i-1}e_1\cdots e_{i-1}e_i{}^2e_{i+1}\cdots e_{2k-1}\boldsymbol{i}^k$$
$$= (-1)^{i}e_1\cdots e_{i-1}e_{i+1}\cdots e_{2k-1}\boldsymbol{i}^k$$

となるから $c_{2k-1}e_i = e_ic_{2k-1}$ である．

補題4.52 $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$ において，つぎの (1)(2) がなりたつ．ただし $k=1,\cdots,n$ とする．

$$(1)\quad \begin{cases} e_i(1\pm e_{2k}) = (1\mp e_{2k})e_i & i\neq 2k \\ e_{2k}(1\pm e_{2k}) = (1\pm e_{2k})e_{2k} = \mp(1\mp e_{2k}) \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} e_i(1+c_{2k-1}) = (1+c_{2k-1})e_i & 1\leqq i\leqq 2k-1 \\ e_{2k-1}(1+c_{2k-1}) = -e_1e_2\cdots e_{2k-2}(1+c_{2k-1})\boldsymbol{i}^k, & e_1(1+c_1) = -(1+c_1)\boldsymbol{i} \end{cases}$$

証 明 (1) は明らかである．

(2) の前半は補題4.51 (2) である．後半を示そう．

$$e_{2k-1}(1+c_{2k-1}) = e_{2k-1}(c_{2k-1}{}^2+c_{2k-1}) \text{（補題 4.51 (1)）} = e_{2k-1}c_{2k-1}(c_{2k-1}+1)$$
$$= e_{2k-1}e_1e_2\cdots e_{2k-2}e_{2k-1}(1+c_{2k-1})\boldsymbol{i}^k = (-1)^{2k-2}e_1e_2\cdots e_{2k-2}e_{2k-1}{}^2(1+c_{2k-1})\boldsymbol{i}^k$$
$$= -e_1e_2\cdots e_{2k-2}(1+c_{2k-1})\boldsymbol{i}^k$$

定 義 $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$ において，2^n 個の元

$$(1\pm e_{2n})\cdots(1\pm e_4)(1\pm e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_3)(1+c_1) \qquad \text{(i)}$$

より生成される $\boldsymbol{C}$-加群を $\varDelta_{2n+1}$ で表わす．

命題4.53 $\varDelta_{2n+1}$ は 2^n 次元既約 $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$-$\boldsymbol{C}$-加群である．

証 明 まず $\varDelta_{2n+1}$ が $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$-$\boldsymbol{C}$-加群であることは，(i) の形の元に e_i, $i=1,\cdots,2n$ を左から掛けると再び (i) の形の元（ただし定数倍は除く）であることをいうと十分である．しかし，それは補題4.52の計算公式を繰返し用いるとわかる．「たとえば $n=2$, $i=3$ として

$$e_3(1+e_4)(1-e_2)(1+c_3)(1+c_1) = (1-e_4)(1+e_2)e_3(1+c_3)(1+c_1)$$
$$= (1-e_4)(1+e_2)((-e_1e_2)(1+c_3)\boldsymbol{i}^2)(1+c_1) \text{（補題 4.52(2)）}$$
$$= (1-e_4)(1+e_2)e_1e_2(1+c_3)(1+c_1) = -(1-e_4)(1+e_2)e_2(1+c_3)e_1(1+c_1)$$
$$= -(1-e_4)(-(1-e_2))(1+c_3)(-(1+c_1)\boldsymbol{i}) = -(1-e_4)(1-e_2)(1+c_3)(1+c_1)\boldsymbol{i}$$

のようである.」$\varDelta_{2n+1}$ は 2^n 個の元から生成される $\boldsymbol{C}$-加群であるから，$\varDelta_{2n+1}$ の次元は高々 2^n 次元である．しかるに $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$ は 2^n より小さい次元の $C(\boldsymbol{C}_-{}^{2n})$-$\boldsymbol{C}$-加群をもたない

(命題2.57)から，Δ_{2n+1} の次元はちょうど 2^n であり，かつ既約である(命題2.57)こともわかる．したがって(i)にかかれた 2^n 個の元は Δ_{2n+1} の $\boldsymbol{C}$-基になる．

$\boldsymbol{T}\xrightarrow{\pi}\tilde{\boldsymbol{T}}\xrightarrow{\tilde{j}} Spin(2n+1)$ ($\tilde{j}$ は包含写像)を定理4.44およびその証明において示した通りとし，$j=\tilde{j}\pi$ とおく．さて $C(\boldsymbol{C}_-^{2n})$-$\boldsymbol{C}$-加群 Δ_{2n+1} を $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群とみなし，さらに Δ_{2n+1} を $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみて，既約 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解しよう．そのため少し準備をする．

補題4.54　$C(\boldsymbol{C}_-^{2n})$ において

$$e_{2k-1}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})=e_{2k-2}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\boldsymbol{i}\qquad k=2,\cdots,n$$

がなりたつ．

証明　$e_{2k-1}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})$

$$\begin{aligned}
&=e_{2k-1}c_{2k-1}c_{2k-3}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\ (\text{補題}\,4.51(1))\\
&=e_{2k-1}e_1e_2\cdots e_{2k-1}e_1e_2\cdots e_{2k-3}\boldsymbol{i}^k\boldsymbol{i}^{k-1}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\\
&=-e_1e_2\cdots e_{2k-2}e_1e_2\cdots e_{2k-3}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\boldsymbol{i}^{2k-1}\\
&=-(-1)^{2k-3}(e_1e_2\cdots e_{2k-3})^2e_{2k-2}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\boldsymbol{i}^{2k-1}\\
&=-(-1)^{2k-3}(-1)^{k-1}e_{2k-2}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})(-1)^k(-\boldsymbol{i})\\
&=e_{2k-2}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

補題4.55　$u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}=(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_2e_4)(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_3)(1+c_1)$ $(\varepsilon_i=\pm1,\ i=1,\cdots,n)$ とおくとき，つぎの(1)(2)がなりたつ．

(1)　$e_1e_2u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}(\varepsilon_1\boldsymbol{i})$

(2)　$e_{2k-1}e_{2k}u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}(-\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\boldsymbol{i})\qquad k=2,\cdots,n$

証明　(1)　$e_1e_2(1+\varepsilon_1e_2)=-\varepsilon_1(1+\varepsilon_1e_2)e_1,\ e_1(1+c_1)=-(1+c_1)\boldsymbol{i}$ (補題4.52(2))を用いると

$$\begin{aligned}
e_1e_2u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}&=e_1e_2(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)\\
&=(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_2e_4)e_1e_2(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)\\
&=(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_2e_4)(1+\varepsilon_1e_2)(-\varepsilon_1)e_1(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)\\
&=(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_3)e_1(1+c_1)(-\varepsilon_1)\\
&=(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_3)(-(1+c_1)\boldsymbol{i})(-\varepsilon_1)\\
&=u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}(\varepsilon_1\boldsymbol{i})
\end{aligned}$$

(2)　補題4.54を用いると

$$e_{2k-1}e_{2k}u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}=e_{2k-1}e_{2k}(1+\varepsilon_ne_{2n})\cdots(1+\varepsilon_1e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)$$

$$= -e_{2k}(1-\varepsilon_n e_{2n})\cdots(1-\varepsilon_1 e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(e_{2k-1}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3}))\cdots(1+c_1)$$
$$= -e_{2k}(1-\varepsilon_n e_{2n})\cdots(1-\varepsilon_1 e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(e_{2k-2}(1+c_{2k-1})(1+c_{2k-3})\boldsymbol{i})\cdots(1+c_1)$$
$$= -(1+\varepsilon_n e_{2n})\cdots e_{2k}(1-\varepsilon_k e_{2k})(1-\varepsilon_{k-1}e_{2k-2})e_{2k-2}\cdots(1+\varepsilon_1 e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)\boldsymbol{i}$$
$$= -(1+\varepsilon_n e_{2n})\cdots\varepsilon_k(1+\varepsilon_k e_{2k})\varepsilon_{k-1}(1+\varepsilon_{k-1}e_{2k-2})\cdots(1+\varepsilon_1 e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)\boldsymbol{i}$$
$$= (1+\varepsilon_n e_{2n})\cdots(1+\varepsilon_1 e_2)(1+c_{2n-1})\cdots(1+c_1)(-\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\boldsymbol{i})$$
$$= u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}(-\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\boldsymbol{i})$$

補題 4.56 $\quad j^*(\Delta_{2n+1}) = \bigoplus_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm 1}(\boldsymbol{W}_1{}^{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_n{}^{\varepsilon_n})$

ここに $\boldsymbol{W}_i$, $i=1,\cdots,n$ は基本既約 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群であり，$\boldsymbol{W}_i{}^{-1}$ は $\boldsymbol{W}_i$ の双対 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とする．

証明 Δ_{2n+1} に $\boldsymbol{C}$-基 $u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}$, $\varepsilon_i=\pm 1$, $i=1,\cdots,n$ をとる（命題 4.53）．このとき $\boldsymbol{t}=(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})\in\boldsymbol{T}$ に対して

$$\boldsymbol{t}u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}e^{i(\varepsilon_1\theta_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_2-\cdots-\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\theta_n)} \qquad (\mathrm{i})$$

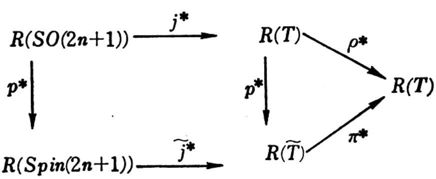
がなりたつ．実際，$u=u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}$ とかくことにすると

$$(\cos\theta_1+e_1e_2\sin\theta_1)u = u\cos\theta_1+e_1e_2u\sin\theta_1$$
$$= u\cos\theta_1+u\,\varepsilon_1\,\boldsymbol{i}\sin\theta_1 \quad (\text{補題 } 4.55\,(1))$$
$$= ue^{i\varepsilon_1\theta_1}$$
$$(\cos\theta_k+e_{2k-1}e_{2k}\sin\theta_k)u = u\cos\theta_k+e_{2k-1}e_{2k}u\sin\theta_k \qquad k=2,\cdots,n$$
$$= u\cos\theta_k+u(-\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k\,\boldsymbol{i}\sin\theta_k) \quad (\text{補題 } 4.55\,(2))$$
$$= ue^{-i\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}\theta_k}$$

となるから（i）を得る．したがって $u_{\varepsilon_n\cdots\varepsilon_1}$ より生成される Δ_{2n+1} の 1 次元部分 $\boldsymbol{C}$-加群は

$$\boldsymbol{W}_1{}^{\varepsilon_1}\otimes\boldsymbol{W}_2{}^{-\varepsilon_1\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_n{}^{-\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}$$

に $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-同型である．$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ は ± 1 の値を任意にとり得るから，$\varepsilon_1, -\varepsilon_1\varepsilon_2, \cdots, -\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n$ を順に $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ におきかえると補題を得る．



さて $j^*(\Delta_{2n+1})$ を単に Δ_{2n+1} で表わすことにし，また $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n-1})^{\boldsymbol{C}})$ に対して $j^*(p^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n+1})^{\boldsymbol{C}})))=\rho^*(j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n+1})^{\boldsymbol{C}})))=\rho^*(\lambda_r')$ も単に λ_r' で表わすことにすると，$R(\boldsymbol{T})$ においてつぎの命題を得る．

命題4.57
$$\Delta_{2n+1}=\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1} z_1^{\varepsilon_1/2}\cdots z_n^{\varepsilon_n/2}=\prod_{i=1}^{n}(z_i^{1/2}+z_i^{-1/2})$$
$$\Delta_{2n+1}\Delta_{2n+1}=1+\lambda_1'+\cdots+\lambda_n'$$

証明 前半は補題4.56である．後半を示そう．
$$1+\lambda_1't+\lambda_2't^2+\cdots+\lambda_{2n+1}'t^{2n+1}$$
$$=(1+z_1t)(1+z_1^{-1}t)\cdots(1+z_nt)(1+z_n^{-1}t)(1+t)$$
(139頁) において $t=1$ とおくと
$$1+\lambda_1'+\lambda_2'+\cdots+\lambda_{2n+1}'$$
$$=(1+z_1)(1+z_1^{-1})\cdots(1+z_n)(1+z_n^{-1})2$$
$$=2(2+z_1+z_1^{-1})\cdots(2+z_n+z_n^{-1})$$
$$=2(z_1^{1/2}+z_1^{-1/2})^2\cdots(z_n^{1/2}+z_n^{-1/2})^2=2\Delta_{2n+1}\Delta_{2n+1}$$
となる．さらに $\lambda_i'=\lambda_{2n+1-i}'$, $i=0,1,\cdots,n$ であるから
$$2(1+\lambda_1'+\cdots+\lambda_n')=1+\lambda_1'+\lambda_2'+\cdots+\lambda_{2n+1}'=2\Delta_{2n+1}\Delta_{2n+1}$$
となる．しかるに $R(\boldsymbol{T})$ は自由加群であるから (2で割り (3頁)) $1+\lambda_1'+\cdots+\lambda_n'=\Delta_{2n+1}\Delta_{2n+1}$ を得る．

(6) 被覆変換 τ の作用

写像 $\tau: Spin(n)\to Spin(n)$ を
$$\tau(x)=-x \qquad x\in Spin(n)$$
と定義すると，τ は $\tau\tau=1$ をみたす同相写像であって，かつ被覆群準同型写像 $p: Spin(n)\to SO(n)$ に対して $p\tau=p$ の関係がある．この τ を $Spin(n)$ の**被覆変換**という．さて環自己同型写像
$$\tau^*: R(Spin(n))\to R(Spin(n))$$
をつぎのように定義しよう．まず $R(Spin(n))$ を指標環 $ch(Spin(n))$ と同一視する (命題3.1(1))．そして $ch(Spin(n))$ の元 χ に対して $\tau^*\chi$ を
$$(\tau^*\chi)(x)=\chi(\tau(x))=\chi(-x) \qquad x\in Spin(n)$$
と定義する．

補題4.58 $Spin(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V が，$-1\in Spin(n)$ に対して
$$(-1)u=u \quad \text{または} \quad (-1)u=-u \qquad u\in V$$
をみたすかによって，それぞれ
$$\tau^*\chi_V=\chi_V,\quad \tau^*\chi_V=-\chi_V \qquad (\chi_V \text{ は } V \text{ の指標})$$

となる．特に $R(Spin(2n+1))$ において

$$\tau^*(\lambda_r') = \lambda_r' \qquad r = 1, \cdots, n$$
$$\tau^*(\Delta_{2n+1}) = -\Delta_{2n+1}$$

がなりたつ．

証 明 $Spin(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V が $(-1)u = -u$, $u \in V$ をみたすとしよう．V に基 $u_1, \cdots, u_n$ をとり，$x \in Spin(n)$ に対して

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) \qquad i = 1, \cdots, n$$

とするとき

$$(-x)u_i = (x(-1))u_i = x((-1)u_i) = x(-u_i) = -xu_i$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} u_j a_{ji}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j(-a_{ji}(x))$$

であるから $\chi_V(-x) = \sum_{i=1}^{n}(-a_{ii}(x)) = -\chi_V(x)$ となる．よって $\tau^*\chi_V = -\chi_V$ となる．他の場合も同様である．

さて写像 $\tau^*: R(Spin(n)) \to R(Spin(n))$ の定義を完成させよう．τ^* は $Spin(n)$ の指標 χ に対して関数 $\tau^*\chi$ を対応させる加群準同型写像 $\tau^*: ch(Spin(n)) \to C_C(Spin(n))$ であったが，この τ^* が環準同型写像になっていることも明らかである．目的の写像 τ^* を定義するためには，τ^* による像が $ch(Spin(n))$ に属することを示さなければならない．n が奇数のときには（n を $2n+1$ とかく），$R(Spin(2n+1))$ が $\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}$ より環として生成されることを次節 (7) で示すので，これと $\tau^*(\lambda_r') = \lambda_r'$, $\tau^*(\Delta_{2n+1}) = -\Delta_{2n+1}$（補題 4.58）より $\tau^*: ch(Spin(2n+1)) \to ch(Spin(2n+1))$ となることが示される．n が偶数のときには（n を $2n$ とかく），§6 (9) で示すように，$R(Spin(2n))$ が $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ より環として生成される（203 頁）ので，補題 4.80 の事実と併せると $\tau^*: ch(Spin(2n)) \to ch(Spin(2n))$ が示される．さらに $\tau^*\tau^* = 1$ であるから，いずれの場合にも τ^* は環同型写像 $\tau^*: R(Spin(n)) \to R(Spin(n))$ を定義するのである．

(7) $Spin(2n+1)$ の複素表現環

$Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V は，$SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群から導かれる $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V_1 と $C(\boldsymbol{C}_-^{2n})$-$\boldsymbol{C}$-加群から誘導される $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V_{-1} の直和に分解される（命題 4.47）．さらに V_{-1} に命題 2.57 を用いると，V はつぎのように $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-

加群の直和に分解される．

$$V \cong V_1 \oplus m\Delta_{2n+1} \qquad m \geqq 0$$

$R(Spin(2n+1))$ の元は $Spin(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V, V' を用いて $[V]-[V']$ と表わされる（命題1.1(2)）ので，$R(Spin(2n+1))$ の元は

$$a + m\Delta_{2n+1} \qquad a \in R(SO(2n+1)),\ m \in \boldsymbol{Z}$$

の形をしている．しかるに $R(SO(2n+1))$ は $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ より環として生成されている（定理4.38）から，$R(Spin(2n+1))$ は $\lambda_1', \cdots, \lambda_n', \Delta_{2n+1}$ より環として生成される．さらに

$$\lambda_n' = \Delta_{2n+1}{}^2 - (1 + \lambda_1' + \cdots + \lambda_{n-1}')$$

（命題4.57）であるから，結局 $R(Spin(2n+1))$ は $\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}$ より環として生成されることがわかる．

つぎに $\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}$ が代数的独立であることを示そう．ある多項式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x]$

$$p = p(x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = \sum_{k \geqq 0} a_k x^k \qquad a_k = a_k(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$$

に対して

$$p(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}) = \sum_{k \geqq 0} a_k(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^k = 0$$

であるとする．この式を

$$\sum_{k=0}^{N} a_{2k}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k} + \sum_{k=0}^{N} a_{2k+1}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k+1} = 0 \qquad \text{(i)}$$

とかき直して，環同型写像 $\tau^*: R(Spin(2n+1)) \to R(Spin(2n+1))$ を施すと補題4.58より

$$\sum_{k=0}^{N} a_{2k}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k} - \sum_{k=0}^{N} a_{2k+1}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k+1} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

となる．(i) (ii) より

$$\sum_{k=0}^{N} a_{2k}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k} = \sum_{k=0}^{N} a_{2k+1}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')\Delta_{2n+1}{}^{2k+1} = 0$$

となる．この式において，$\Delta_{2n+1}{}^2$ を $1 + \lambda_1' + \cdots + \lambda_n'$ におきかえると

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N} a_{2k}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')(1 + \lambda_1' + \cdots + \lambda_n')^k = 0 \\ &\sum_{k=0}^{N} a_{2k+1}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}')(1 + \lambda_1' + \cdots + \lambda_n')^k = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(iii)}$$

を得る．$\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \lambda_n'$ が代数的独立である（命題4.35）ことに注意して，(iii) における $\lambda_n'^N$ の係数を比較すると

$$a_{2N}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}') = a_{2N+1}(\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}') = 0$$

となる．再び $\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}'$ が代数的独立であることを用いると，恒等的に

$$a_{2N} = a_{2N+1} = 0$$

となる．つぎに (iii) の $\lambda_n'^{N-1}$ の係数を比較してという方法を繰返すと，すべての a_k が恒等的に0であることがわかる．よって $p=0$ となり，$\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}$ が代数的独立であることが示された．以上のことをまとめるとつぎの定理を得る．

定理 4.59 $Spin(2n+1)$ の複素表現環 $R(Spin(2n+1))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1', \cdots, \lambda_{n-1}', \Delta_{2n+1}]$ に環同型である：

$$R(Spin(2n+1)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \cdots, \Lambda^{n-1}((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \Delta_{2n+1}]$$

(8) $Spin(8n-1)$, $Spin(8n+1)$ の実表現環

Clifford $\boldsymbol{R}$-多元環 $C(\boldsymbol{R}_-^{8n-2})$, $C(\boldsymbol{R}_-^{8n})$ はそれぞれ $M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R})$, $M(2^{4n}, \boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型である（命題1.47 (1)）．そして，それらはそれぞれただ1つの既約 $C(\boldsymbol{R}_-^{8n-2})$, $C(\boldsymbol{R}_-^{8n})$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{\Delta}_{8n-1}$, $\boldsymbol{\Delta}_{8n+1}$ をもっていた（命題2.57）．これらを $Spin(8n-1)$, $Spin(8n+1)$-$\boldsymbol{R}$-加群とみるとき，その複素化 $Spin(8n-1)$, $Spin(8n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群がそれぞれ Δ_{8n-1}, Δ_{8n+1} である．よって命題3.4を用いると，$Spin(8n-1)$, $Spin(8n+1)$ の実表現環が決定される．

定理 4.60 $Spin(8n-1)$, $Spin(8n+1)$ の実表現環はともに多項式環に環同型である．

$$RO(Spin(8n-1)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{8n-1}), \cdots, \Lambda^{4n-2}(\boldsymbol{R}^{8n-1}), \boldsymbol{\Delta}_{8n-1}]$$
$$RO(Spin(8n+1)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{8n+1}), \cdots, \Lambda^{4n-1}(\boldsymbol{R}^{8n+1}), \boldsymbol{\Delta}_{8n+1}]$$

§6. 回転群 $SO(2n)$ とスピノル群 $Spin(2n)$

(1) $SO(2n)$, $Spin(2n)$ の極大トーラスと Weyl 群

定義 群 $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ において，つぎの形の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \varepsilon_2 k_2 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n = 1$$

全体の集合を $\mathfrak{S}_n^+$ で表わすと，$\mathfrak{S}_n^+$ は $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ の位数 $2^{n-1}n!$ の部分群をつくる．

命題 4.61 群 $\mathfrak{S}_n^+$ は，位数2の群 S^0 の $n-1$ 個の直積群 $(S^0)^{n-1} = S^0 \times \cdots \times S^0$

と n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の半直積に群同型である：

$$\mathfrak{S}_n{}^+ = (S^0)^{n-1}\mathfrak{S}_n, \quad (S^0)^{n-1} \cap \mathfrak{S}_n = 1$$

証明 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) \in S^0 \times \cdots \times S^0$ に対し，$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}$ とおいて，命題 4.17 と同じような写像 j, p, s を定義すると，命題 4.17 と同様にして証明される．

定理 4.62

(1) $$T = \left\{ t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_n \end{pmatrix} \middle| X_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \theta_i \in \boldsymbol{R} \right\}$$

は $SO(2n)$ の極大トーラスである．したがって $SO(2n)$ の階数は n である：$\mathrm{rank}\, SO(2n) = n$

(2) $SO(2n)$ の Weyl 群は群 $\mathfrak{S}_n{}^+$ に群同型である：

$$W(SO(2n)) \cong \mathfrak{S}_n{}^+$$

証明 $SO(2n+1)$ のとき（定理 4.33）の証明とほとんど同じであるが，Weyl 群 $W(SO(2n))$ の計算について少し注意しておこう．行列 $A \in SO(2n)$ が $A \in N_T(SO(2n))$ ならば

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} k_n & k_1 & k_j \end{array}}{\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \epsilon_1 A_{1k_1} & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \epsilon_j A_{jk_j} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\ \epsilon_n A_{nk_n} & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ j \\ \\ n \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} k_n & k_1 & k_j \end{array}}{\begin{pmatrix} \cdots\cdots & \epsilon_1 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \epsilon_j \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots\ \epsilon_n & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A_{\tau(1)1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{\tau(n)n} \end{pmatrix}$$

の形であるが，$\det A = \det(\epsilon_1 \cdots \epsilon_n) = 1$ であるから，$\det \epsilon_i = -1$ であるような ϵ_i の数は偶数個でなければならない．したがって，この A に対応する置換は

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varepsilon_1 k_1 & \varepsilon_2 k_2 & \cdots & \varepsilon_n k_n \end{pmatrix}^{-1} \quad \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = \det \epsilon_1 \cdots \det \epsilon_n = \det(\epsilon_1 \cdots \epsilon_n) = 1$$

となる：$f(A) \in \mathfrak{S}_n{}^+$．

定理 4.63

(1) $$\tilde{T} = \left\{ \tilde{t} = \tilde{t}(\theta_1) \cdots \tilde{t}(\theta_n) \in C(\boldsymbol{R}_-{}^{2n}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \tilde{t}(\theta_i) = \cos\theta_i + e_{2i-1}e_{2i} \sin\theta_i \\ \theta_i \in \boldsymbol{R} \quad i = 1, \cdots, n \end{array} \right\}$$

は $Spin(2n)$ の極大トーラスである．したがって $Spin(2n)$ の階数は n である：$\mathrm{rank}\, Spin(2n) = n$.

(2) $Spin(2n)$ の Weyl 群は群 $\mathfrak{S}_n{}^+$ に群同型である：

$$W(Spin(2n)) \cong W(SO(2n)) \cong \mathfrak{S}_n^{\ +}$$

証 明 $Spin(2n+1)$ のとき（定理4.44）の証明と全く同じである．

（2） $SO(2n)$-C-加群 $(R^{2n})^C$

n 次元 $\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{R}^{2n}$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{R}$-加群であった（例2.1）．したがって，その複素化 $(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群になる．T を定理4.62(1) に示した $SO(2n)$ の極大トーラスとし，$j\colon T \to SO(2n)$ を包含写像とする．$(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ を T-$\boldsymbol{C}$-加群とみて，既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解しよう．

補題4.64 $$j^\#((\boldsymbol{R}^{2n})^C) = W_1 \oplus \hat{W}_1 \oplus \cdots \oplus W_n \oplus \hat{W}_n$$

ここに W_i, $i=1, \cdots, n$ は基本既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群であり，$\hat{W}_i$ は W_i の双対 T-$\boldsymbol{C}$-加群とする．

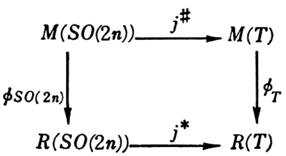
証 明 補題4.36と全く同じであるが再記しよう．$\boldsymbol{R}^{2n}$ に標準基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{2n}$ をとり

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_{2i-1} \otimes 1 - \boldsymbol{e}_{2i} \otimes \boldsymbol{i}), \quad \hat{u}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_{2i-1} \otimes \boldsymbol{i} + \boldsymbol{e}_{2i} \otimes 1) \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと，$u_1, \hat{u}_1, \cdots, u_n, \hat{u}_n$ は $(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ の $\boldsymbol{C}$-基になる．そして $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$tu_i = u_i e^{i\theta_i}, \qquad t\hat{u}_i = \hat{u}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

がなりたつ．よって $u_1, \hat{u}_1, \cdots, u_n, \hat{u}_n$ より生成される $(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ の1次元部分 $\boldsymbol{C}$-加群をそれぞれ $W_1, \hat{W}_1, \cdots, W_n, \hat{W}_n$ とすると補題を得る．



$$\phi_T(W_i) = z_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

とおくと

$$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}]$$

であった（定理3.19）．さて補題4 64を用いて命題4.5, 4.27, 4.37と同じようにすると，$R(T)$ においてつぎの命題を得る．

命題4.65 $$j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n})^C)) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n, \ (n+1, \cdots, 2n)$$

ここに $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, $(\lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_{2n})$ は $z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}$ の基本対称式である．

このようにして $R(SO(2n))$ は，$SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ からつくられた n 個の元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもつことがわかった．しかし環 $R(SO(2n))$ の構造を知るためには，λ_n についてもっと詳しく調べる必要がおこる．そのために例2.11の $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-同型写像

$$f\colon \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C) \to \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)$$

を調べよう．この f は

$$ff=(-1)^{n^2}$$

をみたしている（例2.11）．n が偶数のときには $ff=1$ となるので

$$(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+ = \{u\in\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)\mid f(u)=u\}$$
$$(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^- = \{u\in\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)\mid f(u)=-u\}$$

とおくと，これらはいずれも $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群であって直和分解

$$\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)=(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+\oplus(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^- \qquad \text{(i)}$$

を得る（補題1.7 (1)）．ここまでの話は $\boldsymbol{R}^{2n}$ を複素化する必要がなくて，$SO(2n)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n})$ について同じ考察をすると（例2.10）$SO(2n)$-$\boldsymbol{R}$-加群としての直和分解

$$\Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n})=(\Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n}))^+\oplus(\Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n}))^-$$

が得られ，(i) はこの複素化になっていることを注意しておく．n が奇数のときには $ff=-1$ となるので

$$(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+ = \{u\in\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)\mid f(u)=u\boldsymbol{i}\}$$
$$(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^- = \{u\in\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)\mid f(u)=-u\boldsymbol{i}\}$$

とおくと，これらはいずれも $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群であって直和分解

$$\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)=(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+\oplus(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^-$$

を得る（補題1.7 (2)）．さて

$$j^*((\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+)=\lambda_n{}^+,\qquad j^*((\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^-)=\lambda_n{}^-$$

とおくとき，$R(T)$ においてつぎの命題がなりたつ．

命題 4.66 $\displaystyle \lambda_n{}^+=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=1} z_1{}^{\varepsilon_1}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n}+\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}{}' z_1{}^{\varepsilon_1}\cdots\check{z}_i{}^{\varepsilon_i}\cdots\check{z}_j{}^{\varepsilon_j}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n}$

$$\lambda_n{}^-=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=-1} z_1{}^{\varepsilon_1}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n}+\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}{}' z_1{}^{\varepsilon_1}\cdots\check{z}_i{}^{\varepsilon_i}\cdots\check{z}_j{}^{\varepsilon_j}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n}$$

$\check{z}^\varepsilon$ は除く記号（すなわち z^ε を1におきかえること）であり，かつ $\sum'$ の各項における ∨ の個数は正の偶数である．また

$$\lambda_n=\lambda_n{}^++\lambda_n{}^-$$

がなりたつ．

例 4.8
$$\begin{cases}\lambda_2{}^+=z_1z_2+z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}+1\\ \lambda_2{}^-=z_1z_2{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_3{}^+=z_1z_2z_3+z_1z_2{}^{-1}z_3{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2z_3{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}z_3+z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1}\\ \lambda_3{}^-=z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}z_3{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2z_3+z_1z_2{}^{-1}z_3+z_1z_2z_3{}^{-1}+z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1}\end{cases}$$

命題4.66の証明　$(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ に $\boldsymbol{C}$-基

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2i-1}\otimes 1-e_{2i}\otimes \boldsymbol{i}),\quad \hat{u}_i=u_i^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-e_{2i-1}\otimes \boldsymbol{i}+e_{2i}\otimes 1)\ i=1,\cdots,n$$

をとると，$u_1,\hat{u}_1,\cdots,u_n,\hat{u}_n$ は $(\boldsymbol{R}^{2n})^C$ の正規直交 $\boldsymbol{C}$-基であって

$$u_1\wedge\hat{u}_1\wedge\cdots\wedge u_n\wedge\hat{u}_n=(e_1\otimes 1)\wedge\cdots\wedge(e_n\otimes 1)$$

をみたしている（例1.26）．さらに

$$\bar{u}_i=\hat{u}_i\boldsymbol{i},\quad \hat{u}_i=u_i\boldsymbol{i}\qquad i=1,\cdots,n$$

もみたしている．さて，例2.11の $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-同型写像

$$f\colon \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)\to\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C)$$

を考えよう．この f の定義は $u_1,\hat{u}_1,\cdots,u_n,\hat{u}_n$ を n 個づつの2組 $u_{i_1}{}^{\varepsilon_1},\cdots,u_{i_n}{}^{\varepsilon_n}$; $u_{j_1}{}^{\varepsilon_1'}\cdots,u_{j_n}{}^{\varepsilon_n'}$ $(i_1\leqq\cdots\leqq i_n,\ j_1\leqq\cdots\leqq j_n,\ \varepsilon_i=\pm1,\ \varepsilon_j'=\pm1)$ に分けて

$$f(u_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}{}^{\varepsilon_n})=\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{u_{j_1}{}^{\varepsilon_1'}}\wedge\cdots\wedge\overline{u_{j_n}{}^{\varepsilon_n'}}$$

をみたす $\boldsymbol{C}$-同型写像であった．ここで

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{n(n-1)/2}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$$

であることが容易に確かめられる．f をつぎの2つの場合に分けて調べよう．

（1）$u_{i_1}{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}{}^{\varepsilon_n}$ の下の添数 $i_1,\cdots,i_n$ がすべて異なるとき，すなわち $u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n}$ に対しては

$$\begin{aligned}f(u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n})&=\operatorname{sgn}\sigma\,\overline{u_1{}^{-\varepsilon_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{u_n{}^{-\varepsilon_n}}\\&=\operatorname{sgn}\sigma(u_1{}^{\varepsilon_1}\boldsymbol{i})\wedge\cdots\wedge(u_n{}^{\varepsilon_n}\boldsymbol{i})\\&=(-1)^{n(n-1)/2}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n}\boldsymbol{i}^n\\&=\begin{cases}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n} & n\text{ が偶数のとき}\\ \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n}\boldsymbol{i} & n\text{ が奇数のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

となる．したがって $u=u_1{}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n{}^{\varepsilon_n}$ は $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ のうちに -1 の数が偶数個あれば $u\in(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+$ であり，奇数個あれば $u\in(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^-$ である．「たとえば $n=5$ として

$$f(u_1\wedge\hat{u}_2\wedge u_3\wedge\hat{u}_4\wedge\hat{u}_5)=\operatorname{sgn}\sigma\,u_1\wedge\bar{u}_2\wedge u_3\wedge\bar{u}_4\wedge\bar{u}_5$$

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{pmatrix}1&\hat{1}&2&\hat{2}&3&\hat{3}&4&\hat{4}&5&\hat{5}\\1&\hat{2}&3&\hat{4}&\hat{5},&\hat{1}&2&\hat{3}&4&5\end{pmatrix}=(-1)^{5(5-1)/2+(-1)}=-1\text{ より}$$

$$\begin{aligned}&=-(u_1\boldsymbol{i})\wedge(\hat{u}_2\boldsymbol{i})\wedge(u_3\boldsymbol{i})\wedge(\hat{u}_4\boldsymbol{i})\wedge(\hat{u}_5\boldsymbol{i})\\&=-u_1\wedge\hat{u}_2\wedge u_3\wedge\hat{u}_4\wedge\hat{u}_5\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

となるから $u_1\wedge\hat{u}_2\wedge u_3\wedge\hat{u}_4\wedge\hat{u}_5\in(\Lambda^5((\boldsymbol{R}^{10})^C))^-$ である．」さらに $t=t(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in T$

に対して $tu_i^{\varepsilon_i}=u_i^{\varepsilon_i}e^{i\varepsilon_i\theta_i}$ である (187頁) から

$$t(u_1^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n^{\varepsilon_n})=u_1^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n^{\varepsilon_n}e^{i(\varepsilon_1\theta_1+\cdots+\varepsilon_n\theta_n)}$$

となる．したがって $u_1^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_n^{\varepsilon_n}$ より生成される1次元 T-C-加群が $\lambda_n^{\pm}$ の項 $z_1^{\varepsilon_1}\cdots z_n^{\varepsilon_n}$ に対応している．

(2) $u_{i_1}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}^{\varepsilon_n}$ のうちに $u_i\wedge u_i^{-1}$ が現われるときには，f を施した項のうちには必ず，ある $j\,(j\neq i)$ に対して $u_j\wedge u_j^{-1}$ が現われてくる.「たとえば

$$f(u_1\wedge\hat{u}_1\wedge u_3\wedge\hat{u}_4\wedge\hat{u}_5)=-\mathrm{sgn}\,\sigma\,u_2\wedge\hat{u}_2\wedge u_3\wedge\hat{u}_4\wedge\hat{u}_5\boldsymbol{i}$$

である」．したがって2つの元

$$u^{\pm}=u_{i_1}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_i\wedge u_i^{-1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}^{\varepsilon_n}\pm u_{i_1}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_j\wedge u_j^{-1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

を考えると，一方が $(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+$ に属するならば他方は $(\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^-$ に属している．実際，

$$f(u^+)=\mathrm{sgn}\,\sigma\,u^+\boldsymbol{i}^n,\quad f(u^-)=-\mathrm{sgn}\,\sigma\,u^-\boldsymbol{i}^n$$

となるからである．そして $t(u_k\wedge u_k^{-1})=u_ke^{i\theta_k}\wedge u_k^{-1}e^{-i\theta_k}=u_k\wedge u_k^{-1}$, $k=1,\cdots,n$ であるから

$$tu^{\pm}=u^{\pm}e^{i(\varepsilon_1\theta_1+\cdots+\check{\varepsilon_i\theta_i}+\cdots+\check{\varepsilon_j\theta_j}+\cdots+\varepsilon_n\theta_n)}$$

となる．したがって $u^{\pm}$ より生成される T-C-加群はそれぞれ $\lambda_n^{\pm}$ の単項 $z_1^{\varepsilon_1}\cdots\check{z}_i^{\varepsilon_i}\cdots\check{z}_j^{\varepsilon_j}\cdots z_n^{\varepsilon_n}$ に対応している．以上のことは，$u=u_{i_1}^{\varepsilon_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_n}^{\varepsilon_n}$ に $u_i\wedge u_i^{-1}$ が何組現われても，$u^{\pm}=u\pm f(u)$ を考える上記と同様な考察をすることができる．なお (2) の形の単項 $z_1^{\varepsilon_1}\cdots\check{z}_i^{\varepsilon_i}\cdots\check{z}_j^{\varepsilon_j}\cdots z_n^{\varepsilon_n}$ は λ_n^+, λ_n^- に平等に現われていることに注意しよう．最後に $\lambda_n=\lambda_n^++\lambda_n^-$ は明らかである．

$R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_n,z_n^{-1}]$ において

$$\sigma_n^+=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=1}z_1^{\varepsilon_1}\cdots z_n^{\varepsilon_n},\quad \sigma_n^-=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=-1}z_1^{\varepsilon_1}\cdots z_n^{\varepsilon_n}$$

とおく．このとき命題4.66 (その証明も参照) と例4.4よりつぎの補題を得る．

補題 4.67

$$\lambda_n^+=\sigma_n^++\sigma_{n-2}+3\sigma_{n-4}+10\sigma_{n-6}+\cdots+\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\sigma_{n-2k}+\cdots$$

$$\lambda_n^-=\sigma_n^-+\sigma_{n-2}+3\sigma_{n-4}+10\sigma_{n-6}+\cdots+\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\sigma_{n-2k}+\cdots$$

の関係がある．したがって特に

$$\lambda_n^+-\lambda_n^-=\sigma_n^+-\sigma_n^-$$

がなりたつ.

(3) $Spin(2n)$-C-加群 $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$

Clifford C-多元環 $C(C_-^{2n-1})$ は $M(2^{n-1}, C) \oplus M(2^{n-1}, C)$ に C-多元環として同型である（命題1.47(2)）. そして $M(2^{n-1}, C) \oplus M(2^{n-1}, C)$ は2つの既約 $M(2^{n-1}, C) \oplus M(2^{n-1}, C)$-$C$-加群 $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ をもっていた（命題2.59）. この $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ について調べよう.

定 義 Clifford C-多元環 $C(C_-^{2n-1})$ において, 元 c_{2k-1}, $k=1, \cdots, n$ を

$$c_{2k-1} = e_1 e_2 \cdots e_{2k-1} i^k$$

と定義する. そして $C(C_-^{2n-1})$ において 2^{n-1} 個の元

$$(1 \pm e_{2n-2}) \cdots (1 \pm e_4)(1 \pm e_2)(1 + c_{2n-1}) \cdots (1 + c_3)(1 + c_1)$$

および

$$(1 \pm e_{2n-2}) \cdots (1 \pm e_4)(1 \pm e_2)(1 - c_{2n-1}) \cdots (1 - c_3)(1 - c_1)$$

より生成される2つの C-加群を $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ で表わす. 詳しくいうならば, n が偶数のときには前者を Δ_{2n}^+, 後者を Δ_{2n}^- とし, n が奇数のときにはその逆とする.

補題4.52のほかに等式

$$\begin{cases} e_i(1 - c_{2k-1}) = (1 - c_{2k-1})e_i \qquad 1 \leqq i \leqq 2k-1 \\ e_{2k-1}(1 - c_{2k-1}) = e_1 e_2 \cdots e_{2k-2}(1 - c_{2k-1}) i^k, \quad e_1(1 - c_1) = (1 - c_1) i \end{cases}$$

を用いると, 命題4.53と同様にしてつぎの命題を得る.

命題4.68 $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ はともに 2^{n-1} 次元既約 $C(C_-^{2n-1})$-C-加群である.

$\tilde{T}$ を定理4.63(1)で示した $Spin(2n)$ の極大トーラスとし, $\tilde{j}: \tilde{T} \to Spin(2n)$ を包含写像とする. そして $Spin(2n+1)$ のときと同様に写像 $\pi: T \to \tilde{T}$ を定義し, $j = \tilde{j}\pi: T \to Spin(2n)$ とおく. さて $C(C_-^{2n-1})$-C-加群 $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ を $Spin(2n)$-C-加群とみなし, さらに $\Delta_{2n}^+, \Delta_{2n}^-$ を T-C-加群とみて既約 T-C-加群の直和に分解しよう. そのためにつぎの2つの補題を用意する. その証明はいずれも補題4.54, 4.55と同じようにするとよい.

補題4.69 $C(C_-^{2n-1})$ において

$$e_{2k-1}(1 - c_{2k-1})(1 - c_{2k-3}) = e_{2k-2}(1 - c_{2k-1})(1 - c_{2k-3}) i \qquad k = 2, \cdots, n$$

がなりたつ.

補題4.70

(1) $u_{\varepsilon_{n-1} \cdots \varepsilon_1} = (1 + \varepsilon_{n-1} e_{2n-2}) \cdots (1 + \varepsilon_2 e_4)(1 + \varepsilon_1 e_2)(1 + c_{2n-1}) \cdots (1 + c_3)(1 + c_1)$

$(\varepsilon_i=\pm1,\ i=1,\cdots,n-1)$ とおくとき

$$\begin{cases} e_1e_2u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(\varepsilon_1\,\boldsymbol{i}) \\ e_{2k-1}e_{2k}u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(-\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k\,\boldsymbol{i}) \qquad k=2,\cdots,n-1 \\ e_{2n-1}u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(\varepsilon_{n-1}\,\boldsymbol{i}) \end{cases}$$

がなりたつ.

(2) $v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=(1+\varepsilon_{n-1}e_{2n-2})\cdots(1+\varepsilon_2e_4)(1+\varepsilon_1e_2)(1-c_{2n-1})\cdots(1-c_3)(1-c_1)$ $(\varepsilon_i=\pm1,\ i=1,\cdots,n-1)$ とおくとき

$$\begin{cases} e_1e_2v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(-\varepsilon_1\boldsymbol{i}) \\ e_{2k-1}e_{2k}v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(-\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k\,\boldsymbol{i}) \qquad k=2,\cdots,n-1 \\ e_{2n-1}v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}(\varepsilon_{n-1}\,\boldsymbol{i}) \end{cases}$$

がなりたつ.

補題 4.71

$$j^*(\Delta_{2n}^+)=\bigoplus_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=1}(\boldsymbol{W}_1^{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_n^{\varepsilon_n})$$
$$j^*(\Delta_{2n}^-)=\bigoplus_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=-1}(\boldsymbol{W}_1^{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{W}_n^{\varepsilon_n})$$

ここに $\boldsymbol{W}_i,\ i=1,\cdots,n$ は基本既約 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群であり，$\boldsymbol{W}_i^{-1}$ は $\boldsymbol{W}_i$ の双対 $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とする.

証明 $\Delta_{2n}^+,\ \Delta_{2n}^-$ に（または $\Delta_{2n}^-,\ \Delta_{2n}^+$ に）それぞれ $\boldsymbol{C}$-基 $u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}$; $v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1},\ \varepsilon_i=\pm1,\ i=1,\cdots,n-1$ をとる（命題4.68）. このとき $\boldsymbol{t}=(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$ に対して

$$\boldsymbol{t}u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}e^{i(\varepsilon_1\theta_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_2-\cdots-\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\theta_{n-1}+\varepsilon_{n-1}\theta_n)}$$
$$\boldsymbol{t}v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}=v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}e^{i(-\varepsilon_1\theta_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\theta_2-\cdots-\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\theta_{n-1}+\varepsilon_{n-1}\theta_n)}$$

がなりたつ. 実際，これらの計算は補題 4.56 と同様にするとよいのであるが，$Spin(2n)$ を $C(\boldsymbol{C}_-^{2n-1})$ の部分集合とみるとき，$e_{2n-1}e_{2n}\in Spin(2n)$ を $e_{2n-1}\in C(\boldsymbol{C}_-^{2n-1})$ とみなしていることを思い出さねばならない（命題 1.48）. したがって $u=u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}$ に対して $(\cos\theta_n+e_{2n-1}e_{2n}\sin\theta_n)u$ の計算は，$C(\boldsymbol{C}_-^{2n-1})$ では

$$\begin{aligned}(\cos\theta_n+e_{2n-1}\sin\theta_n)u&=u\cos\theta_n+e_{2n-1}u\sin\theta_n\\&=u\cos\theta_n+u\varepsilon_{n-1}\,\boldsymbol{i}\sin\theta_n \quad (\text{補題 } 4.70\,(1))\\&=ue^{i\varepsilon_{n-1}\theta_n}\end{aligned}$$

であるから，$(\cos\theta_n+e_{2n-1}e_{2n}\sin\theta_n)u=ue^{i\varepsilon_{n-1}\theta_n}$ となるのである. もう 1 つの式についても同様である. さて $u_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1},\ v_{\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1}$ より生成される $C(\boldsymbol{C}_-^{2n-1})$ の 1 次元部分 $\boldsymbol{C}$-加群はそれぞれ

$$W_1^{\varepsilon_1}\otimes W_2^{-\varepsilon_1\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes W_{n-1}^{-\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}}\otimes W_n^{\varepsilon_{n-1}}$$

$$W_1^{-\varepsilon_1}\otimes W_2^{-\varepsilon_1\varepsilon_2}\otimes\cdots\otimes W_{n-1}^{-\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}}\otimes W_n^{\varepsilon_{n-1}}$$

に $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-同型である．このとき $\boldsymbol{W}_i$ の肩の符号を掛けると前者は $(-1)^n$，後者は $(-1)^{n+1}$ である．よって $\pm\varepsilon_1$, $-\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\cdots$, $-\varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}$, ε_{n-1} を順に ε_1, $\cdots$, ε_n にかきかえると，Δ_{2n}^+, Δ_{2n}^- の $+$, $-$ の約束（191 頁）より補題を得る．

$R(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_n{}^{1/2}, z_n{}^{-1/2}]$ において $j^*(\Delta_{2n}^+)$, $j^*(\Delta_{2n}^-)$ を単に Δ_{2n}^+, Δ_{2n}^- で表わすことにすると，補題 4.71 はつぎの命題を示している．

命題 4.72 $\displaystyle \Delta_{2n}^+=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=1} z_1{}^{\varepsilon_1/2}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n/2},\quad \Delta_{2n}^-=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=-1} z_1{}^{\varepsilon_1/2}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n/2}$

（4） $R(SO(2n))$ における関係

$R(Spin(2n))\subset R(\boldsymbol{T})$ において $\Delta_{2n}=\Delta_{2n}^+ + \Delta_{2n}^-$ とおくと，命題 4.72 より

$$\Delta_{2n}=\sum_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n=\pm1} z_1{}^{\varepsilon_1/2}\cdots z_n{}^{\varepsilon_n/2}=\prod_{i=1}^n (z_i{}^{1/2}+z_i{}^{-1/2})$$

となる．$\Delta_{2n}\Delta_{2n}$ を計算するとつぎの関係式

$$\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^+ + 2\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^- + \Delta_{2n}^-\Delta_{2n}^- = 2+2\lambda_1+\cdots+2\lambda_{n-1}+\lambda_n^+ + \lambda_n^-$$

を得る．実際，等式

$$1+\lambda_1 t+\lambda_2 t^2+\cdots+\lambda_{2n}t^{2n}=(1+z_1t)(1+z_1{}^{-1}t)\cdots(1+z_nt)(1+z_n{}^{-1}t)$$

（139 頁）において $t=1$ とおき，$\lambda_{2n-i}=\lambda_i$, $i=1, \cdots, n-1$, $\lambda_n=\lambda_n^+ + \lambda_n^-$（命題 4.66）を用いると

$$\begin{aligned}
2+2\lambda_1+\cdots+2\lambda_{n-1}+\lambda_n^+ + \lambda_n^- &= 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_n+\cdots+\lambda_{2n}\\
&=(1+z_1)(1+z_1{}^{-1})\cdots(1+z_n)(1+z_n{}^{-1})\\
&=\prod_{i=1}^n(2+z_i+z_i{}^{-1})=\prod_{i=1}^n(z_i{}^{1/2}+z_i{}^{-1/2})^2=\Delta_{2n}\Delta_{2n}=(\Delta_{2n}^+ + \Delta_{2n}^-)^2\\
&=\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^+ + 2\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^- + \Delta_{2n}^-\Delta_{2n}^-
\end{aligned}$$

となる．「以下の計算の理解を助けるために，例として $n=2$ のときを書いておこう．

$$\Delta_4^+=z_1{}^{1/2}z_2{}^{1/2}+z_1{}^{-1/2}z_2{}^{-1/2},\quad \Delta_4^-=z_1{}^{1/2}z_2{}^{-1/2}+z_1{}^{-1/2}z_2{}^{1/2}$$

$$\begin{cases}\lambda_1=z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}\\ \lambda_2^+=z_1z_2+z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}+1,\quad \lambda_2^-=z_1{}^{-1}z_2+z_1z_2{}^{-1}+1\end{cases}$$

$$\Delta_4\Delta_4=z_1z_2+z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}+z_1z_2{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2+2z_1+2z_1{}^{-1}+2z_2+2z_2{}^{-1}+4$$

$$\Delta_4^+\Delta_4^+=z_1z_2+z_1{}^{-1}z_2{}^{-1}+2=\lambda_2^+ +1,\quad \Delta_4^-\Delta_4^-=z_1z_2{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2+2=\lambda_2^- +1$$

$$\Delta_4^+\Delta_4^-=z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}$$」

さて

$$\Delta_{2n}\Delta_{2n}=\sum_{\varepsilon_i,\,\delta_j=\pm1} z_1{}^{(\varepsilon_1+\delta_1)/2}\cdots z_n{}^{(\varepsilon_n+\delta_n)/2}$$

を調べよう．$\Delta_{2n}\Delta_{2n}$ の項 $z=z_1^{(\varepsilon_1+\delta_1)/2}\cdots z_n^{(\varepsilon_n+\delta_n)/2}$ において

$\varepsilon_j=1,\ \delta_j=1$ となる j の個数を p

$\varepsilon_j=-1,\ \delta_j=-1$ となる j の個数を q

$\varepsilon_j=1,\ \delta_j=-1$ となる j の個数を r

$\varepsilon_j=-1,\ \delta_j=1$ となる j の個数を s

とおくと明らかに $p+q+r+s=n$ である．また

$\varepsilon_j=-1$ となる j の個数を a

$\delta_j=-1$ となる j の個数を b

とおくと $a=q+s,\ b=q+r$ である．そして

a,b がともに偶数のとき z は $\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^+$ に属し

a,b の一方だけが偶数のとき z は $\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^-$ に属し

a,b がともに奇数のとき z は $\Delta_{2n}^-\Delta_{2n}^-$ に属している．

したがって

$a+b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ のとき z は $\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^+ + \Delta_{2n}^-\Delta_{2n}^-$ に属し

$a+b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$ のとき z は $\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^-$ に属している．

一方 $z=z_1^{\eta_1}\cdots z_n^{\eta_n}=z_1^{(\varepsilon_1+\delta_1)/2}\cdots z_n^{(\varepsilon_n+\delta_n)/2}$ において

$\eta_j=1$ となる j の個数が p

$\eta_j=0$ となる j の個数が $r+s$

$\eta_j=-1$ となる j の個数が q

となるので，z が $\lambda_{n-i}=\sum z_{j_1}^{\pm 1}\cdots z_{j_{n-i}}^{\pm 1}$ に属する条件は

$$p+q=n-i \qquad \text{(i)}$$

である．しかるに $p+q=n-r-s=n-(b-q)-(a-q)=n+2q-(a+b)\equiv n-(a+b)\ (\mathrm{mod}\ 2)$ であるから (i) より

$$i\equiv a+b\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

となる．以上のことから，$\Delta_{2n}\Delta_{2n}$ の項 z に対して

z が $\lambda_n+2(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots)$ に属する $\Leftrightarrow 0\equiv i\equiv a+b\ (\mathrm{mod}\ 2)$

$\Leftrightarrow z$ が $\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^+ + \Delta_{2n}^-\Delta_{2n}^-$ に属する

z が $2(\lambda_{n-1}+\lambda_{n-3}+\cdots)$ に属する $\Leftrightarrow 1\equiv i\equiv a+b\ (\mathrm{mod}\ 2)$

$\Leftrightarrow z$ が $2\Delta_{2n}^+\Delta_{2n}^-$ に属する

ことがわかる．よって，つぎの2つの関係を得る．

$$\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{+}+\Delta_{2n}{}^{-}\Delta_{2n}{}^{-}=\lambda_n{}^{+}+\lambda_n{}^{-}+2(\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots) \qquad \text{(ii)}$$

$$2\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{-}=2(\lambda_{n-1}+\lambda_{n-3}+\cdots) \qquad \text{(iii)}$$

これらよりさらに詳しくつぎのことがなりたつ.

命題 4.73

$$\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{+}=\lambda_n{}^{+}+\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots$$

$$\Delta_{2n}{}^{-}\Delta_{2n}{}^{-}=\lambda_n{}^{-}+\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots$$

$$\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{-}=\lambda_{n-1}+\lambda_{n-3}+\lambda_{n-5}+\cdots$$

右辺における和は, $\cdots+\lambda_4+\lambda_2+1$ または $\lambda_3+\lambda_1$ で終る.

証 明 $\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{+}-\Delta_{2n}{}^{-}\Delta_{2n}{}^{-}=(\Delta_{2n}{}^{+}+\Delta_{2n}{}^{-})(\Delta_{2n}{}^{+}-\Delta_{2n}{}^{-})$

$$=\prod_{i=1}^{n}(z_i{}^{1/2}+z_i{}^{-1/2})\prod_{i=1}^{n}(z_i{}^{1/2}-z_i{}^{-1/2})=\prod_{i=1}^{n}(z_i-z_i{}^{-1})$$

$$=\sigma_n{}^{+}-\sigma_n{}^{-}=\lambda_n{}^{+}-\lambda_n{}^{-} \qquad \text{(iv)}$$

(補題 4.67) となるから, ((ii)+(iv))÷2, ((ii)−(iv))÷2 をつくると初めの 2 つの式を得る. 最後の式は (iii)÷2 である.

命題 4.74 $R(SO(2n))$ においてつぎの関係がある.

$$(\lambda_n{}^{+}+\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots)(\lambda_n{}^{-}+\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots)=(\lambda_{n-1}+\lambda_{n-3}+\cdots)^2$$

証 明 等式 $\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{-}\Delta_{2n}{}^{-}=\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{-}\Delta_{2n}{}^{+}\Delta_{2n}{}^{-}$ に命題 4.73 の結果を代入するとよい.

(5) 写像 $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ および $\boldsymbol{\kappa}$ の作用

写像 $\tilde{\kappa}$: $C(C_-{}^{2n-1})\to C(C_-{}^{2n-1})$ (50 頁) は連続写像

$$\tilde{\kappa}: Spin(2n)\to Spin(2n)$$

を誘導している. また群同型写像 $\boldsymbol{\kappa}$: $\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}$ を

$$\boldsymbol{\kappa}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})=(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_{n-1}},e^{-i\theta_n})$$

と定義すると

$$\boldsymbol{j}\boldsymbol{\kappa}=\tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{j}$$

がなりたつ. 実際,

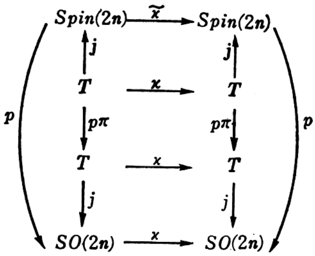
$$\tilde{\kappa}(\cos\theta+e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta)=\cos\theta+e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta \qquad i=1,\cdots,n-1$$

であるが, $\cos\theta+e_{2n-1}e_{2n}\sin\theta\in Spin(2n)$ を $C(C_-{}^{2n-1})$ の元とみるときには $\cos\theta+e_{2n-1}\sin\theta$ とする約束であった (命題 1.48) ので

$$\tilde{\kappa}(\cos\theta+e_{2n-1}e_{2n}\sin\theta)=\cos\theta-e_{2n-1}e_{2n}\sin\theta$$

となる. 以上より $\boldsymbol{j}\boldsymbol{\kappa}=\tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{j}$ を得る.

つぎに元 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \in O(2n)$



をとり, $SO(2n)$の**外部自己同型写像**† とよばれる連続な群同型写像 κ: $SO(2n) \to SO(2n)$ を

$$\kappa(x) = \gamma x \gamma \qquad x \in SO(2n)$$

と定義する. この κ を $SO(2n)$ の極大トーラス T に制限すると

$$\kappa\begin{pmatrix} X(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & X(\theta_{n-1}) & \\ & & & X(\theta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\theta_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & X(\theta_{n-1}) & \\ & & & X(-\theta_n) \end{pmatrix} \quad X(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

となり, したがって κ は連続な群同型写像 κ: $T \to T$ を誘導している.

なお (後で直接には用いないかもしれないが)

$$p\tilde{\kappa} = \kappa p$$

もなりたっている. 実際, $a = a_1 \cdots a_{2m} \in Spin(2n)$, $a_i \in S^{2n-1}$ に対して, 各 $p\tilde{\kappa}(a_i)$ は γa_i に関する反射写像になる ([21] 236 頁および補題 103 (3)) ことから $p\tilde{\kappa} = \kappa p$ がわかる. 以上で上の右図における各写像が可換であることが示されたことになる.

さて環自己同型写像

$$\tilde{\kappa}^*: R(Spin(2n)) \to R(Spin(2n))$$

をつぎのように定義しよう. まず $R(Spin(2n))$ を指標環 $ch(Spin(2n))$ と同一視する (命題 3.1(1)). そして $ch(Spin(2n))$ の元 χ に対して $\tilde{\kappa}^*(\chi)$ を

$$(\tilde{\kappa}^*(\chi))(x) = \chi(\tilde{\kappa}(x)) \qquad x \in Spin(2n)$$

と定義する. このとき $\tilde{\kappa}^*$ が環準同型写像 $\tilde{\kappa}^*$: $ch(Spin(2n)) \to C_C(Spin(2n))$ になっていることは明らかである. なお κ: $SO(2n) \to SO(2n)$ は群同型写像であるから, 当然環同型写像

---

† κ が $SO(2n)$ の内部自己同型写像でないことは, $\kappa(\lambda_n^+) = \lambda_n^-$ (補題 4.75 (2)) の事実からわかる (補題 3.11).

$$\kappa^*: R(SO(2n)) \to R(SO(2n))$$

をひきおこしている.

補題 4.75 (1) $R(Spin(2n))$ において

$$\tilde{\kappa}^*(\lambda_r) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n-1$$

$$\tilde{\kappa}^*(\lambda_n{}^+) = \lambda_n{}^-, \qquad \tilde{\kappa}^*(\lambda_n{}^-) = \lambda_n{}^+$$

$$\tilde{\kappa}^*(\Delta_{2n}{}^+) = \Delta_{2n}{}^-, \qquad \tilde{\kappa}^*(\Delta_{2n}{}^-) = \Delta_{2n}{}^+$$

がなりたつ.

(2) $R(SO(2n))$ において

$$\kappa^*(\lambda_r) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n-1$$

$$\kappa^*(\lambda_n{}^+) = \lambda_n{}^-, \qquad \kappa^*(\lambda_n{}^-) = \lambda_n{}^+$$

がなりたつ.

証 明 (1) $\kappa^*: R(T) \to R(T)$ において, 明らかに

$$\kappa^*(z_i{}^{1/2}) = z_i{}^{1/2} \qquad i = 1, \cdots, n-1$$

$$\kappa^*(z_n{}^{1/2}) = z_n{}^{-1/2}, \qquad \kappa^*(z_n{}^{-1/2}) = z_n{}^{1/2}$$

がなりたっている. $\lambda_r, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-, \Delta_{2n}{}^+, \Delta_{2n}{}^-$ に j^* を施して $R(T)$ の元とみたときの形(命題 4.65, 4.66, 4.72) と, κ^* が環同型写像であること, および $j^*\tilde{\kappa}^* = \kappa^* j^*$ のことから補題を得る.

(2) (1) と同様にして証明できる. ((2) は (1) の結果に含まれているともいえる).

写像 $\tilde{\kappa}^*: ch(Spin(2n)) \to C_C(Spin(2n))$ の像が $ch(Spin(2n))$ に含まれることは, $R(Spin(2n))$ が, $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta_{2n}{}^+, \Delta_{2n}{}^-$ より生成されることをあとで (203 頁) 示すので, このことと補題 4.75 (1) からわかる. このことより $\tilde{\kappa}^*: R(Spin(2n)) \to R(Spin(2n))$ が定義され, しかも環自己同型写像であることが結論されるのである.

(6) $SO(2n)$ の複素表現環

$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}]$ への Weyl 群 $W(SO(2n)) \cong \mathfrak{S}_n{}^+ \cong (S^0)^{n-1}\mathfrak{S}_n$ (命題 4.61) の作用は変換 $(z_1, \cdots, z_n) \to (z_1{}^{\varepsilon_1}, \cdots, z_n{}^{\varepsilon_n})$, $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) および $z_1, \cdots, z_n$ の置換より合成されている (定理 4.62 の証明参照). さて包含関係

$$R(SO(2n)) \subset R(T)^{W(SO(2n))}$$

において $R(SO(2n))$ が $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ をもつことを知っている. $R(SO(2n))$ が (そのために $R(T)^{W(SO(2n))}$ が) $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ より環として生成されることを示そう. $w \in N_T(SO(2n))$ に対して

$$\kappa h_w = h_{\gamma w \gamma} \kappa$$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\kappa} & T \\ {\scriptstyle h_w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{\gamma w \gamma}} \\ T & \xrightarrow{\kappa} & T \end{array}$$

がなりたつことに注意すると，$\kappa^*: R(T) \to R(T)$ は

$$\kappa^*: R(T)^{W(SO(2n))} \to R(T)^{W(SO(2n))}$$

を誘導することがわかる．実際，$a \in R(T)^{W(SO(2n))}$，$\omega = [w] \in W(SO(2n))$ に対して

$$\omega\kappa^*(a) = h_w{}^*\kappa^*(a) = \kappa^* h^*{}_{\gamma w \gamma}(a) = \kappa^*(a)$$

となるからである．さて κ^* は $\kappa^*\kappa^* = 1$ をみたすから

$$R_+ = \{a \in R(T)^{W(SO(2n))} \mid \kappa^*(a) = a\},\ R_- = \{a \in R(T)^{W(SO(2n))} \mid \kappa^*(a) = -a\}$$

とおくと，加群としての直和分解

$$R(T)^{W(SO(2n))} = R_+ \oplus R_-$$

を得る（補題 1.7 (1) 参照)).（以下 $W(SO(2n))$ を $\mathfrak{S}_n{}^+$ とかく）．定義より明らかに

$$R_+ = \{a \in R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^+} \mid \kappa^*(a) = a\} = R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^*}$$

であるから，R_+ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \lambda_n{}^+ + \lambda_n{}^-$ より環として生成される（157 頁）ことを知っている．つぎに R_- を調べよう．$a \in R_-$ を

$$a = \sum_m a_m z_n{}^m \qquad a_m \in \boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_{n-1}, z_{n-1}{}^{-1}]$$

とかくとき，$\kappa^*(a) = -a$ より $a_{-m} = -a_m$, $m = 0, 1, 2, \cdots$ となる．よって

$$a = \sum_{m \geq 1} a_m(z_n{}^m - z_n{}^{-m})$$

の形をしており，a は $z_n - z_n{}^{-1}$ の因数をもつ．$R_- \subset R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^+}$ の元は $z_1, \cdots, z_n$ に関して対称性をもつから，a は

$$(z_1 - z_1{}^{-1}) \cdots (z_n - z_n{}^{-1}) = \sigma_n{}^+ - \sigma_n{}^- = \lambda_n{}^+ - \lambda_n{}^-$$

（補題 4.67）の因数をもち，$a = b_2(\lambda_n{}^+ - \lambda_n{}^-)$ の形をしている．しかるに

$$\kappa^*(\lambda_n{}^+ - \lambda_n{}^-) = \lambda_n{}^- - \lambda_n{}^+ \ (\text{補題 } 4.75\,(2)) = -(\lambda_n{}^+ - \lambda_n{}^-)$$

より $\lambda_n{}^+ - \lambda_{n-} \in R_-$ であり，よって $b_2 \in R_+$ となる．結局，$R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^+}$ の元は

$$b_1 + b_2(\lambda_n{}^+ - \lambda_n{}^-) \qquad b_1, b_2 \in R_+ = R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^*}$$

の形をしており，そして b_1, b_2 が $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ の多項式で表わされるから，$R(T)^{\mathfrak{S}_n{}^+}$ の元は $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ の多項式で表わされる．よって $R(SO(2n)) = R(T)^{W(SO(2n))}$ となり，$R(SO(2n))$ が $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ より環として生成されることがわかった．

つぎに $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ が

$$(\lambda_n{}^+ + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-4} + \cdots)(\lambda_n{}^- + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-4} + \cdots) = (\lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \cdots)^2 \qquad (\text{i})$$

(命題 4.74) 以外に代数的な関係をもたないことを示そう．すなわち写像 f: $\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^+, x_n^-] \to R(SO(2n))$ を

$$f(p(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^+, x_n^-)) = p(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^+, \lambda_n^-)$$

と定義すると f は全射（前記のこと）環準同型写像であるが，f の核 $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0)$ が

$$a = (x_n^+ + x_{n-2} + x_{n-4} + \cdots)(x_n^- + x_{n-2} + x_{n-4} + \cdots) - (x_{n-1} + x_{n-3} + \cdots)^2$$

より生成されるイデアル $\mathfrak{a}$ に一致する：$\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\, f$ ことを示そう．（i）より $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}\, f$ は明らかである．逆に $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathfrak{a}$ をいうには，$\mathrm{Ker}\, f$ に属する多項式 p は多項式 a で割り切れることを示さねばならない．そのために，まず p が x_n^+, x_n^- に関して対称式になっているときに証明しよう．$p \in \mathrm{Ker}\, f$ が x_n^+, x_n^- に関して対称ならば，p を $x_n^+ + x_n^- = x_n$, $x_n^+ x_n^- = y$ の多項式

$$p = p(y) = a_m y^m + \cdots + a_1 y + a_0 \qquad a_i \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n] = A$$

で表わしておく．$p(y)$ を

$$a = a(y) = x_n^+ x_n^- + x_n(x_{n-2} + \cdots) + (x_{n-2} + \cdots)^2 - (x_{n-1} + x_{n-3} + \cdots)^2$$
$$= y + b \qquad b \in A$$

で割るとわかるように，$p(y)$ はある多項式 $q(y) \in A[y]$ と $r \in A$ を用いて

$$p(y) = q(y)a(y) + r$$

とかける．これに f を施すと

$$0 = r(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$$

となる．しかるに $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ は $R(SO(2n))$ において代数的独立である（命題 4.25）から，r は恒等的に 0 であり，p は a で割り切れる：$p \in \mathfrak{a}$．さて $\mathrm{Ker}\, f$ に属する一般の多項式 p を考えよう．p は

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^+, \lambda_n^-) = 0$$

をみたすが，これに写像 κ^*: $R(SO(2n)) \to R(SO(2n))$ を施すと

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^-, \lambda_n^+) = 0$$

となる（補題 4.75 (2)）ので，$p = p(x_n^+, x_n^-) \in B[x_n^+, x_n^-]$, $B = \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ に対して $p(x_n^-, x_n^+)$ も $\mathrm{Ker}\, f$ に属する．そして

$$p(x_n^+, x_n^-) - p(x_n^-, x_n^+) = (x_n^+ - x_n^-)q(x_n^+, x_n^-) \qquad q(x_n^+, x_n^-) \in B[x_n^+, x_n^-]$$

と表わすとき，$q(x_n^+, x_n^-)$ は x_n^+, x_n^- に関して対称式であり，しかも $\mathrm{Ker}\, f$ に属する．上述より $q(x_n^+, x_n^-)$ は a で割り切れるので

$$p(x_n^+, x_n^-) - p(x_n^-, x_n^+) \in \mathfrak{a} \qquad \text{(ii)}$$

となる．一方 $p(x_n^+, x_n^-)+p(x_n^-, x_n^+)$ を考えると，これは x_n^+, x_n^- の対称式であり，かつ $\mathrm{Ker}\, f$ に属するので

$$p(x_n^+, x_n^-)+p(x_n^-, x_n^+)\in \mathfrak{a} \tag{iii}$$

となる．(ii)＋(iii) をつくると $2p(x_n^+, x_n^-)\in\mathfrak{a}$ となるが，これよりさらに $p(x_n^+, x_n^-)\in\mathfrak{a}$ になる．以上で $\mathrm{Ker}\, f=\mathfrak{a}$ が示された．よって（環準同型定理より）つぎの環同型

$$\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^+, x_n^-]/\mathfrak{a}\cong R(SO(2n))$$

がなりたつ．

以上のことをまとめるとつぎの定理を得る．

定理 4.76　$SO(2n)$ の複素表現環 $R(SO(2n))$ は環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^+, \lambda_n^-]/\sim$ に環同型である：

$$R(SO(2n))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \cdots, \Lambda^{n-1}((\boldsymbol{R}^{2n})^C), (\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^+, (\Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C))^-]/\mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a}=((\lambda_n^+ +\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots)(\lambda_n^- +\lambda_{n-2}+\lambda_{n-4}+\cdots)-(\lambda_{n-1}+\lambda_{n-3}+\cdots)^2)$$

(7)　$SO(4n)$ の実表現環

$SO(4n)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n})$ は，$SO(4n)$-$\boldsymbol{R}$-加群として直和分解

$$\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n})=(\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^+\oplus(\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^-$$

ができることは188頁に述べた通りである．そして $\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{4n}), \cdots, \Lambda^{2n-1}(\boldsymbol{R}^{4n}), (\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^+, (\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^-$ の複素化 $SO(4n)$-$\boldsymbol{C}$-加群の含む類が $R(SO(4n))$ の環としての生成元になっている（定理 4.76）．よって命題 3.4 より $SO(4n)$ の実表現環が決定される．

定理 4.77　$SO(4n)$ の実表現環 $RO(SO(4n))$ は環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}^+, \lambda_{2n}^-]/\sim$ に環同型である：

$$RO(SO(4n))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{4n}), \cdots, \Lambda^{2n-1}(\boldsymbol{R}^{4n}), (\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^+, (\Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{4n}))^-]/\mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a}=((\lambda_{2n}^+ +\lambda_{2n-2}+\lambda_{2n-4}+\cdots)(\lambda_{2n}^- +\lambda_{2n-2}+\lambda_{2n-4}+\cdots)-(\lambda_{2n-1}+\lambda_{2n-3}+\cdots)^2)$$

(8)　$SO(2n)$ の Lie 環 $\mathfrak{D}_n$

この節は Lie 環 $\mathfrak{B}_n$ とほとんど同じであるが，再び詳しくかくことにする．

$$\mathfrak{D}_n=\{X\in M(2n, \boldsymbol{R})\mid {}^tX=-X\}$$

において Lie 積を $[X, Y]=XY-YX$ と定義すると，$\mathfrak{D}_n$ は $n(2n-1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_n$ を $\boldsymbol{SO(2n)}$ **の Lie 環**という．$\mathfrak{D}_n$ が $n(2n-1)$ 次元であることは，その $\boldsymbol{R}$-基として

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad i < j$$

を選ぶことができるからである．$\mathfrak{D}_n$ における $A \in SO(2n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{D}_n$$

と定義すると，$\mathfrak{D}_n$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化

$$\mathfrak{D}_n{}^C \cong \{X \in M(2n, \boldsymbol{C}) \mid {}^tX = -X\}$$

は $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．また

$$S = \left.\begin{pmatrix} S' & & \\ & \ddots & \\ & & S' \end{pmatrix}\right\} n \qquad S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし

$$\mathfrak{D}_n{}' = \{X \in M(2n, \boldsymbol{C}) \mid {}^tXS = -SX\}$$

において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{D}_n{}'$ は $\boldsymbol{C}$-Lie 環になる．

$$P = \left.\begin{pmatrix} P' & & \\ & \ddots & \\ & & P' \end{pmatrix}\right\} n \qquad P' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

とおき，$\mathfrak{D}_n{}'$ における $A \in SO(2n)$ の作用を

$$A \cdot X = (P^{-1}AP)X(P^{-1}AP)^{-1}$$

と定義すると，$\mathfrak{D}_n{}'$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群になる．そして，つぎの補題がなりたつ．

補題 4.78 $\mathfrak{D}_n{}^C$ と $\mathfrak{D}_n{}'$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群として（また $\boldsymbol{C}$-Lie 環としても）同型である：$\mathfrak{D}_n{}^C \cong \mathfrak{D}_n{}'$.

行列 $X \in M(2n, \boldsymbol{C})$ が $\mathfrak{D}_n{}'$ に属するためには，X が

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & Y_{12} \cdots & Y_{1n} \\ Y_{12}{}' & X_2 \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{1n}{}' & Y_{2n}{}' \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

$$X_i = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{C}) \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$Y_{ij} = \begin{pmatrix} u & v \\ \hat{v} & \hat{u} \end{pmatrix} \in M(2, \boldsymbol{C}) \text{ に対して } Y_{ij}' = \begin{pmatrix} -\hat{u} & -v \\ -\hat{v} & -u \end{pmatrix} \qquad i < j$$

の形の行列であることが必要十分である.

定理 4.79 $R(SO(2n)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-]/\sim$ において

$$j^*(\mathfrak{D}_n{}^C) = \lambda_2$$

となる.

証明 $\mathfrak{D}_n{}'$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ.

$$h_i = E_{2i-1\,2i-1} - E_{2i\,2i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$u_{ij} = E_{2i-1\,2j-1} - E_{2j\,2i}, \quad \hat{u}_{ij} = E_{2i\,2j} - E_{2j-1\,2i-1} \qquad i < j$$

$$v_{ij} = E_{2i-1\,2j} - E_{2j-1\,2i}, \quad \hat{v}_{ij} = E_{2i\,2j-1} - E_{2j\,2i-1} \qquad i < j$$

このとき $t = t(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T$ に対して

$$t \cdot h_i = h_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$t \cdot u_{ij} = u_{ij} e^{i(\theta_i - \theta_j)}, \quad t \cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} \qquad i < j \tag{i}$$

$$t \cdot v_{ij} = v_{ij} e^{i(\theta_i + \theta_j)}, \quad t \cdot \hat{v}_{ij} = \hat{v}_{ij} e^{-i(\theta_i + \theta_j)} \qquad i < j$$

がなりたつ. よって

$$j^*(\mathfrak{D}_n{}^C) = j(\mathfrak{D}_n{}') = n + \sum_{i<j} (z_i z_j{}^{-1} + z_i{}^{-1} z_j + z_i z_j + z_i{}^{-1} z_j{}^{-1}) = \lambda_2$$

となる.

注意 $\mathfrak{D}_n{}'$ を用いずに直接 $\mathfrak{D}_n{}^C$ に (i) の関係をみたす $\boldsymbol{C}$-基を選びたいならば, ($P u_{ij} P^{-1}$ 等を計算して (ただし定数倍は無視する)) つぎのように選ぶとよい.

$$H_i = G_{2i-1\,2i} \otimes 1 \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\left.\begin{aligned} U_{ij} &= (G_{2i-1\,2j-1} + G_{2i\,2j}) \otimes 1 + (G_{2i-1\,2j} - G_{2i\,2j-1}) \otimes \boldsymbol{i} \\ \hat{U}_{ij} &= (G_{2i-1\,2j-1} + G_{2i\,2j}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{2i-1\,2j} - G_{2i\,2j-1}) \otimes 1 \\ V_{ij} &= (G_{2i-1\,2j-1} - G_{2i\,2j}) \otimes 1 - (G_{2i-1\,2j} + G_{2i\,2j-1}) \otimes \boldsymbol{i} \\ \hat{V}_{ij} &= -(G_{2i-1\,2j-1} - G_{2i\,2j}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{2i-1\,2j} + G_{2i\,2j-1}) \otimes 1 \end{aligned}\right\} \quad i < j$$

例 4.9 $\qquad \mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R}) = \{X \in M(2n, \boldsymbol{R}) \mid {}^tX = X\}$

は $n(2n+1)$ 次元 $\boldsymbol{R}$-加群であり, $A \in SO(2n)$ の作用を

$$A \cdot X = AXA^{-1} \qquad X \in \mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})$$

と定義すると $\mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})$ は $SO(2n)$-$\boldsymbol{R}$-加群になる. したがってその複素化

$$\mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})^C \cong \{X \in M(2n, \boldsymbol{C}) \mid {}^tX = X\} = \mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{C})$$

は $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．この $SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})^C$ は $R(SO(2n))$ において

$$j^*(\mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})^C) = \lambda_1{}^2 - \lambda_2$$

となる．これを示すためには $\mathfrak{S}(2n, \boldsymbol{R})^C$ の代りに $J(2n, \boldsymbol{C}) = \{X \in M(2n, \boldsymbol{C}) \mid {}^tXS = SX\}$ を考えて $\mathfrak{D}_n{}^C$ のときと同じようにして証明するとよい．

（9） $Spin(2n)$ の複素表現環

$Spin(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V は，$SO(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群から導かれる $Spin(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V_1 と C $(\boldsymbol{C}_-{}^{2n-1})$-$\boldsymbol{C}$-加群から誘導される $Spin(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V_{-1} の直和に分解される（命題 4.47）．さらに V_{-1} に命題 2.59 を用いると，V はつぎのように $Spin(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解される．

$$V \cong V_1 \oplus k\varDelta_{2n}{}^+ \oplus m\varDelta_{2n}{}^- \qquad k,\ m \geqq 0$$

$R(Spin(2n))$ の元は $Spin(2n)$-$\boldsymbol{C}$-加群 V, V' を用いて $[V]-[V']$ と表わされる（命題 1.1(2)）ので，$R(Spin(2n))$ の元は

$$a + k\,\varDelta_{2n}{}^+ + m\,\varDelta_{2n}{}^- \qquad a \in R(SO(2n)),\ k,\ m \in \boldsymbol{Z}$$

の形をしている．しかるに $R(SO(2n))$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-$ より環として生成されている（定理 4.76）ので，$R(Spin(2n))$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n{}^+, \lambda_n{}^-, \varDelta_{2n}{}^+, \varDelta_{2n}{}^-$ より環として生成される．しかるに

$$\lambda_n{}^+ = \varDelta_{2n}{}^+\varDelta_{2n}{}^+ - (\lambda_{n-2} + \lambda_{n-4} + \cdots)$$

$$\lambda_n{}^- = \varDelta_{2n}{}^-\varDelta_{2n}{}^- - (\lambda_{n-2} + \lambda_{n-4} + \cdots)$$

$$\lambda_{n-1} = \varDelta_{2n}{}^+\varDelta_{2n}{}^- - (\lambda_{n-3} + \lambda_{n-5} + \cdots)$$

（命題 4.73）であるから，結局 $R(Spin(2n))$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \varDelta_{2n}{}^+, \varDelta_{2n}{}^-$ より環として生成されることがわかる．つぎに $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \varDelta_{2n}{}^+, \varDelta_{2n}{}^-$ が代数的独立であることを示そう．そのために補題 4.58 の前半より明らかなつぎの補題をあげておく．

補題 4.80 $R(Spin(2n))$ において

$$\tau^*(\lambda_r) = \lambda_r \qquad r = 1, \cdots, n$$

$$\tau^*(\varDelta_{2n}{}^+) = -\varDelta_{2n}{}^+, \quad \tau^*(\varDelta_{2n}{}^-) = -\varDelta_{2n}{}^-$$

がなりたつ．

さて，ある多項式 $p \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-2}, x^+, x^-]$ に対して

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \varDelta_{2n}{}^+, \varDelta_{2n}{}^-) = 0 \qquad \text{(i)}$$

であるとする．このような関係式のうちで x^+, x^- に関する次数が最小であるものが p であるとすると，p は x^+, x^- に関して対称式である．実際，（i）に写像 $\tilde{\kappa}^*$: $R(Spin(2$

$n)) \to R(Spin(2n))$ を施して補題 4.75 (1) を用いると

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta_{2n}^-, \Delta_{2n}^+) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

となる．(i)－(ii) をつくるとその左辺は $\Delta_{2n}^+ - \Delta_{2n}^-$ の因数をもつので，p が x^+, x^- の対称式でないならば，p より低い次数の関係式を得るからである．よって p を $x^+ + x^- = x$, x^+x^- の多項式

$$p = \sum_{k,l} a_{kl} x^k (x^+x^-)^l \qquad a_{kl} = a_{kl}(x_1, \cdots, x_{n-2}) \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_{n-2}]$$

と表わしておく．このとき

$$\sum_{k,l} a_{kl}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \Delta_{2n}{}^k (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l = 0$$

である．この式を

$$\sum_{k,l} a_{2k\,l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l + \sum_{k,l} a_{2k+1\,l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k+1} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l = 0 \quad \text{(iii)}$$

とかき直して，写像 $\tau^*: R(Spin(2n)) \to R(Spin(2n))$ を施すと，補題 4.80 より

$$\sum_{k,l} a_{2kl}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l - \sum_{k,l} a_{2k+1l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k+1} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l = 0 \quad \text{(iv)}$$

となる．(iii) (iv) より

$$\sum_{k,l} a_{2kl}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l = \sum_{k,l} a_{2k+1\,l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}) \Delta_{2n}{}^{2k+1} (\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^-)^l = 0$$

となる．この式において

$$\Delta_{2n}{}^2 = 2 + 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{n-1} + \lambda_n$$

$$\Delta_{2n}{}^+ \Delta_{2n}{}^- = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \cdots$$

(193 頁，命題 4.73) を代入すると

$$\begin{cases} \sum_{k,l} a_{2k\,l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2})(2 + 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{n-1} + \lambda_n)^k (\lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \cdots)^l = 0 \\ \sum_{k,l} a_{2k+1l}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2})(2 + 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{n-1} + \lambda_n)^k (\lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \cdots)^l = 0 \end{cases}$$

を得る．$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ が代数的独立である (命題 4.25) ことに注意して，上記の λ_n の最高次の係数を比較すると

$$a_{KL}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2})(2 + 2\lambda_1 + \cdots + 2\lambda_{n-1})^K (\lambda_{n-1} + \lambda_{n-3} + \cdots)^L = 0$$

を得る．再び $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ が代数的独立であることを用いると，恒等的に

$$a_{KL} = 0$$

となる．このことを繰返すと，すべての a_{kl} が恒等的に 0 であることがわかる．よって $p = 0$ となり，$\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta_{2n}{}^+, \Delta_{2n}{}^-$ が代数的独立であることが示された．以上のことをまとめるとつぎの定理を得る．

定理 4.81 $Spin(2n)$ の複素表現環 $R(Spin(2n))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta^+, \Delta^-]$ に環同型である：

$$R(Spin(2n)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \cdots, \Lambda^{n-2}((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \Delta_{2n}{}^+, \Delta_{2n}{}^-]$$

(10) $Spin(8n)$ の実表現環

Clifford $\boldsymbol{R}$-多元環 $C(\boldsymbol{R}_-{}^{8n-1})$ は $M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R}) \oplus M(2^{4n-1}, \boldsymbol{R})$ に $\boldsymbol{R}$-多元環として同型であった（命題 1.47 (1)). そしてそれは 2 つの既約 $C(\boldsymbol{R}_-{}^{8n-1})$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\boldsymbol{\Delta}_{8n}{}^+, \boldsymbol{\Delta}_{8n}{}^-$ をもっていた（命題 2.59). これらを $Spin(8n)$-$\boldsymbol{R}$-加群とみるとき，その複素化 $Spin(8n)$-$\boldsymbol{C}$-加群がそれぞれ $\Delta_{8n}{}^+, \Delta_{8n}{}^-$ である．よって命題 3.4 を用いると $Spin(8n)$ の実表現環が決定される．

定理 4.82 $Spin(8n)$ の実表現環 $RO(Spin(8n))$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{4n-2}, \Delta^+, \Delta^-]$ に環同型である：

$$RO(Spin(8n)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{8n}), \cdots, \Lambda^{4n-2}(\boldsymbol{R}^{8n}), \boldsymbol{\Delta}_{8n}{}^+, \boldsymbol{\Delta}_{8n}{}^-]$$

注 意 表現環 $R(Spin(n))$ の構造を決定するのに $R(SO(n))$ の構造と命題 4.47 を用いており，$G = U(n), Sp(n), SO(n)$ のときのように，$R(G) = R(T)^{W(G)}$ のことから導いていない．しかし，このときにも

$$R(Spin(n)) = R(\tilde{T})^{W(Spin(n))}$$

の事実はなりたっている．この略証を記しておこう．n が奇数のとき（n を $2n+1$ とかく）を考える．$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_n{}^{1/2}, z_n{}^{-1/2}]$ に群 $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ を変換 $z_i{}^{1/2} \to z_i{}^{-1/2}$ および $z_1{}^{1/2}, \cdots, z_n{}^{1/2}$ の置換として働かすとき，$R(\boldsymbol{T})^{\mathfrak{S}_n{}^{\pm}}$ は $z_1{}^{1/2} + z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_n{}^{1/2} + z_n{}^{-1/2}$ の基本対称式 $\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_{n-1}, \tilde{\lambda}_n = \Delta_{2n+1}$ の多項式環になる．そして

$$\begin{aligned} R(\tilde{T})^{W(Spin(2n+1))} &= (\boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}, (z_1 \cdots z_n)^{1/2}])^{\mathfrak{S}_n{}^{\pm}} \\ &\subset (\boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_n{}^{1/2}, z_n{}^{-1/2}])^{\mathfrak{S}_n{}^{\pm}} \\ &= \boldsymbol{Z}[\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_{n-1}, \Delta_{2n+1}] \end{aligned}$$

とみなしておく．さて $p \in R(\tilde{T})^{W(Spin(2n+1))}$ を

$$p = a + b(z_1 \cdots z_n)^{1/2} \qquad a, b \in \boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, \cdots, z_n, z_n{}^{-1}]$$

とかくとき，$a, b(z_1 \cdots z_n)^{1/2}$ それぞれが $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ 不変になる．a は $(\boldsymbol{Z}[z_1, \cdots, z_n])^{\mathfrak{S}_n{}^{\pm}}$ の元であるから $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ の多項式でかける．つぎに

$$b(z_1 \cdots z_n)^{1/2} = b_m \Delta_{2n+1}{}^m + \cdots + b_1 \Delta_{2n+1} + b_0 \qquad b_i \in \boldsymbol{Z}[\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_{n+1}]$$

とかくとき，この式より $b_0 = 0$ がわかり，上式は

$$= \Delta_{2n+1}(b_m \Delta_{2n+1}{}^{m-1} + \cdots + b_1)$$

となる．$\Delta_{2n+1}=(z_1\cdots z_n)^{1/2}\prod_{i=1}^{n}(1+z_i^{-1})$ であることに注意すると，$b_m\Delta_{2n+1}{}^{m-1}+\cdots+b_1$ は $z_1, z_1^{-1}, \cdots, z_n, z_n^{-1}$ の多項式になり，しかも $\mathfrak{S}_n{}^{\pm}$ 不変になる．よって $b_m\Delta_{2n+1}{}^{m-1}+\cdots+b_1$ は $\lambda_1', \cdots, \lambda_n'$ の多項式である．以上より $R(\tilde{T})^{W(Spin(2n+1))}$ の元は $\lambda_1', \cdots, \lambda_n', \Delta_{2n+1}$ の多項式で表わされ，$R(Spin(2n+1))=R(\tilde{T})^{W(Spin(2n+1))}$ が示された．$R(Spin(2n))=R(\tilde{T})^{W(Spin(2n))}$ も同じようにして証明される．5章で例外群 F_4 の表現環を求めるとき，$R(Spin(8))=R(\tilde{T})^{W(Spin(8))}$ を用いるので注意としてかいておいた．

§7. 付記 直交群 $O(n)$ の表現環

前節までで古典群の表現環のことを終えるが，重要な群 $O(n)$ の表現環について述べていない．直交群 $O(n)$ は弧状連結でないので極大トーラスをもたない（例 3.2）．したがって $O(n)$ の表現環を求めるには，$R(T)$ と Weyl 群の関係を調べるという方法は通用しない．しかし，極大トーラスに代るものとして Cartan 部分群を用い，さらに誘導表現の理論（G. Segal: The representation ring of a compact Lie group, Pub. Math. Inst. 34, (1968)）などを用いて，南春夫氏が $O(n)$ の表現環を決定した．H. Minami: The Representation Rings of orthogonal Groups, Osaka Jour. Math., 1971. また竹内勝氏も異なる方法で同じ結果を得ている．M. Takeuchi: A remark on the character ring of a compact Lie group, Jour. Math. Soc. Japan, 1971. ここでは結果のみを引用しておく．

定理 4.83 $O(n)$ の複素表現環 $R(O(n))$ はつぎの環に環同型である．

$$R(O(2n+1))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \cdots, \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \Lambda^{2n+1}((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C)]/(\lambda_{2n+1}{}^2-1)$$

$$R(O(2n))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \cdots, \Lambda^n((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \Lambda^{2n}((\boldsymbol{R}^{2n})^C)]/(\lambda_{2n}{}^2-1, \lambda_n\lambda_{2n}-\lambda_n)$$

$O(n)$ の実表現環 $RO(O(n))$ も $R(O(n))$ と環同型である．

$$RO(O(2n+1))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{2n+1}), \cdots, \Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n+1}), \Lambda^{2n+1}(\boldsymbol{R}^{2n+1})]/(\lambda_{2n+1}{}^2-1)$$

$$RO(O(2n))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\boldsymbol{R}^{2n}), \cdots, \Lambda^n(\boldsymbol{R}^{2n}), \Lambda^{2n}(\boldsymbol{R}^{2n})]/(\lambda_{2n}{}^2-1, \lambda_n\lambda_{2n}-\lambda_n)$$

ここに $\boldsymbol{R}^n$ は例 2.1 の $O(n)$-$\boldsymbol{R}$-加群であり，$(\boldsymbol{R}^n)^C$ はその複素化 $O(n)$-$\boldsymbol{C}$-加群である．なお分母において $\Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n+1})^C), \Lambda^r((\boldsymbol{R}^{2n})^C), \Lambda^r(\boldsymbol{R}^{2n+1}), \Lambda^r(\boldsymbol{R}^{2n})$ を λ^r とかいている．

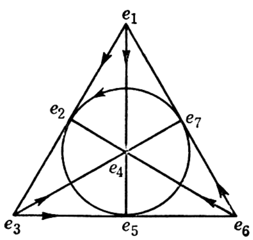
5 例外群 G_2, F_4 の表現環

例外群とよばれる5つの単連結なコンパクト単純 Lie 群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 のうち，本章では G_2, F_4 の表現環を決定しよう．その方法は古典群のときと同様，極大トーラスの表現環と Weyl 群との関係を調べる方法を用いる．

§1. 例外群 G_2

(1) Cayley 数体 $\mathfrak{C}$

Cayley 数全体の集合を $\mathfrak{C}$ で表わす．Cayley 数について説明しよう． $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を基とする8次元 $\boldsymbol{R}$-加群を $\mathfrak{C}$ とし，その元を **Cayley 数**という．すなわち Cayley 数 a は1通りに $a = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{7} e_i \alpha_i$, $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$ と表わされている． $\mathfrak{C}$ の基の間に積をつぎのように定める．左図において左の線上 e_1, e_2, e_3 の間では $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = e_1$, $e_3e_1 = e_2$ と定義する．他の線上でもこれと同様に定義する．たとえば $e_1e_6 = e_7$, $e_4e_7 = e_3$ 等である．(ただし e_2, e_5, e_7 も同一直線上にあるとみなす．たとえば $e_5e_7 = e_2$ である)．さらに $e_0 = 1$ は積の単位元であるとし，



$$e_i^2 = -1 \ (i \neq 0), \qquad e_ie_j = -e_je_i \quad (i \neq j,\ i \neq 0,\ j \neq 0)$$

$$(\alpha 1)e_i = e_i(\alpha 1) = \alpha e_i \qquad \alpha \in \boldsymbol{R}$$

とし，さらに分配法則がなりたつとすると $\mathfrak{C}$ に積が定義される．(以下 $\alpha 1$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ を単に α で表わす)． $\mathfrak{C}$ の元 $a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i$ に対して $\bar{a} = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i$ を a の**共役元**といい，$\mathrm{Re}a = \alpha_0$ を a の**実部**という．実部に関して

$$\mathrm{Re}(ab) = \mathrm{Re}(ba), \quad \mathrm{Re}(a(bc)) = \mathrm{Re}((ab)c)$$

がなりたつ． $\mathfrak{C}$ の2つの元 $a = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i$, $b = \sum_{i=0}^{7} \beta_i e_i$ の**内積** (a, b) を $\sum_{i=0}^{7} \alpha_i \beta_i$ で，a の**絶対値** $|a|$ を $\sqrt{(a, a)}$ で定義する．0でない Cayley 数 a に対して $\dfrac{\bar{a}}{|a|^2}$ を a^{-1} とおくと

$aa^{-1}=a^{-1}a=1$ がなりたつ．そして $\mathfrak{C}$ は体の定義のうち，結合法則 $a(bc)=(ab)c$ を除いた法則をすべてみたしている．もちろん可換法則 $ab=ba$ は成立しない．結合法則，可換法則よりむしろつぎのことがなりたつ．すべての $u, v\in\mathfrak{C}$ に対して

$$u(va)=(uv)a \quad \text{ならば} \quad a\in \boldsymbol{R}$$

$$au=ua \quad \text{ならば} \quad a\in \boldsymbol{R}$$

がそれぞれなりたつ．結合法則をみたさないので $\mathfrak{C}$ は体ではないが，体 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とよく似た性質をもっているので $\mathfrak{C}$ を **Cayley 数体** ということもある．結合法則がなりたたないので Cayley 数の取扱いは大そう面倒であるが，結合法則に代るものとしてつぎの諸公式がある（証明は [21] 240 頁）．$a, b, u, v\in\mathfrak{C}$ とする．

0. $|uv|=|u||v|$

1. $(au, av)=(a, a)(u, v)=(ua, va)$

2. $(au, bv)+(bu, av)=2(a, b)(u, v)$

3. $(au, v)=(u, \bar{a}v), \quad (ua, v)=(u, v\bar{a})$

4. $\bar{\bar{u}}=u, \quad \overline{u+v}=\bar{u}+\bar{v}, \quad \overline{uv}=\bar{v}\bar{u}$

5. $(u, v)=(v, u)=\dfrac{1}{2}(\bar{u}v+\bar{v}u)=\dfrac{1}{2}(u\bar{v}+v\bar{u}), \quad u\bar{u}=\bar{u}u=|u|^2$

6. $a(\bar{a}u)=(a\bar{a})u, \quad a(u\bar{a})=(au)\bar{a}, \quad u(a\bar{a})=(ua)\bar{a}$

$a(au)=(aa)u, \quad a(ua)=(au)a, \quad u(aa)=(ua)a$

7. $\bar{b}(au)+\bar{a}(bu)=2(a, b)u=(ua)\bar{b}+(ub)\bar{a}$

8.† $(au)v+u(va)=a(uv)+(uv)a$

$(ua)v+(uv)a=u(av)+u(va)$

$(au)v+(ua)v=a(uv)+u(av)$

9. $(au)(va)=a(uv)a$ 　　(**Moufang の 公式**)

$1, a_1, a_2, \cdots, a_7$ を $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基とするとき

10.1. $a_i(a_ju)=-a_j(a_iu)$ $(i\neq j)$．特に $a_ia_j=-a_ja_i$ $(i\neq j)$

10.2. $a_i(a_iu)=-u$．特に $a_i^2=-1$

10.3. $a_i(a_ja_k)=a_j(a_ka_i)=a_k(a_ia_j)$ (i, j, k は異なる)

がなりたつ．

---

† $a, b, c\in\mathfrak{C}$ に対して $(a, b, c)=(ab)c-a(bc)$ とおくとき，8 式は

$$(a, b, c)=(b, c, a)=(c, a, b)=-(a, c, b)=-(c, b, a)=-(b, c, a)$$

がなりたつことを示している．

（2） 例外群 G_2

群 G_2 を定義する前に，群 $O(8)$, $SO(8)$, $O(7)$, $SO(7)$ について約束しておく．まず Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ における直交群 $O(\mathfrak{C})$ を $O(8)$ と同一視する：

$$O(8)=O(\mathfrak{C})$$

この同一視には，つねに $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基 $1, e_1, e_2, \cdots, e_7$ を用いるものとする（172頁）．したがって，以後 $O(8)$ の元 x は直交行列 $x \in O(8)$ とみなすこともあるし，

$$(x(u), x(v))=(u, v) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-同型写像 $x: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ とみることもある．同様に $O(8)$ の部分群である $SO(8)$, $O(7)$, $SO(7)$ に対しても，つぎの同一視をする．

$$SO(8)=\{x \in O(\mathfrak{C}) \mid \det x=1\}$$
$$O(7)=\{x \in O(\mathfrak{C}) \mid x(1)=1\}$$
$$SO(7)=\{x \in O(\mathfrak{C}) \mid x(1)=1, \det x=1\}$$

定 義　$\boldsymbol{R}$-同型写像 $x: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ が

$$x(uv)=x(u)x(v)^{\dagger} \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたすとき，x を $\mathfrak{C}$ の**自己同型写像**という．$\mathfrak{C}$ の自己同型写像全体の集合 $Aut(\mathfrak{C})$ は写像の合成の積に関して群をつくる．この群 $Aut(\mathfrak{C})$ を G_2 で表わし，**G_2-型例外 Lie 群**という．

補 題 5.1　G_2 は直交群 $O(7)$ の閉部分群である：$G_2 \subset O(7)$．したがって G_2 はコンパクト群である．

証 明　まず $x \in G_2$ は

$$x(1)=1, \quad \overline{x(e_i)}=-x(e_i) \qquad i=1, \cdots, 7$$

をみたすことを示そう．実際，$x(1)x(1)=x(1\cdot 1)=x(1)$, $x(1) \neq 0$ より $(x(1))^{-1}$ を掛けて $x(1)=1$ を得る．つぎに $i \neq 0$ のとき $x(e_i)x(e_i)=x(e_ie_i)=x(-1)=-x(1)=-1$ より $\overline{x(e_i)}=-x(e_i)$ となる．（一般に $a \in \mathfrak{C}$ が $aa=-1$ であるとき，両辺の絶対値をとると $|a|=1$ となる．よって $aa=-1$ の両辺に $\bar{a}$ を掛けると $a=-\bar{a}$ となる）．これらの式より

$$\overline{x(u)}=x(\bar{u}) \qquad u \in \mathfrak{C}$$

を得る．実際，$u=\alpha_0+\sum_{i=1}^{7} e_i\alpha_i$, $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$ とするとき，$\overline{x(u)}=\overline{x(\alpha_0+\sum_i e_i\alpha_i)}=x(1)$

† $x(u)$ を xu ともかくので，$x(uv)=x(u)x(v)$ はあとでは $x(uv)=(xu)(xv)$ のようにかいている．

$\alpha_0+\sum_i \overline{x(e_i)}\alpha_i = x(1)\alpha_0 - \sum_i x(e_i)\alpha_i = x(\alpha_0-\sum_i e_i\alpha_i) = x(\bar{u})$ である．さて

$$|x(u)|^2 = x(u)\overline{x(u)} = x(u)x(\bar{u}) = x(u\bar{u}) = x(|u|^2) = |u|^2x(1) = |u|^2$$

となるから $x\in O(8)$ である（[21] 補題 16）．しかるに $x(1)=1$ であるから $x\in O(7)$ となる．よって $G_2\subset O(7)$ である．なお G_2 は $O(7)$ の閉集合であるから，G_2 はコンパクト群 $O(7)$ の閉部分群としてコンパクトである（補題 1.56）．

（3） G_2 の位相的性質

定 理 5.2 G_2 の部分群 $H_1=\{x\in G_2 \mid x(e_1)=e_1\}$ は $SU(3)$ に（位相）群同型である：

$$SU(3)\subset G_2$$

証 明 $x\in H_1$ が $\mathfrak{C}_0=\{u\in\mathfrak{C} \mid \mathrm{Re}\,u=0\}$ において

$$x(e_2) = ae_2+be_3+ce_4+de_5+ee_6+fe_7$$

$$x(e_4) = a'e_2+b'e_3+c'e_4+d'e_5+e'e_6+f'e_7 \qquad a, b, \cdots, f \text{ 等} \in \boldsymbol{R}$$

$$x(e_6) = a''e_2+b''e_3+c''e_4+d''e_5+e''e_6+f''e_7$$

であるとする．このとき $x(e_3)=x(e_1e_2)=x(e_1)x(e_2)=e_1x(e_2)$ より

$$x(e_3) = ae_3-be_2+ce_5-de_4+ee_7-fe_6$$

となる．$x(e_5)=x(e_1e_4)=e_1x(e_4)$, $x(e_7)=x(e_1e_6)=e_1x(e_6)$ であるから，$x(e_5)$, $x(e_7)$ に対しても同様なことがなりたつ．したがって $x\in H_1$ を $\mathfrak{C}_0$ の $\boldsymbol{R}$-基 $e_1, e_2, \cdots, e_7$ を用いて行列で表わすと

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & a' & -b' & a'' & -b'' \\ 0 & b & a & b' & a' & b'' & a'' \\ 0 & c & -d & c' & -d' & c'' & -d'' \\ 0 & d & c & d' & c' & d'' & c'' \\ 0 & e & -f & e' & -f' & e'' & -f'' \\ 0 & f & e & f' & e' & f'' & e'' \end{pmatrix}$$

となる．この x に対して行列

$$A=\begin{pmatrix} a+b\boldsymbol{i} & a'+b'\boldsymbol{i} & a''+b''\boldsymbol{i} \\ c+d\boldsymbol{i} & c'+d'\boldsymbol{i} & c''+d''\boldsymbol{i} \\ e+f\boldsymbol{i} & e'+f'\boldsymbol{i} & e''+f''\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

をつくると $A \in U(3)$ である．さらに $\det A = 1$ であることを示すために $x(e_6) = x(e_4 e_2) = x(e_4)x(e_2)$ を用いる．この式を成分で表わすと

$$a'' = ce' - ec' + fd' - df', \quad b'' = fc' - cf' + ed' - de'$$
$$c'' = ea' - ae' + bf' - fb', \quad d'' = af' - fa' + be' - eb'$$
$$e'' = ac' - ca' + db' - bd', \quad f'' = da' - ad' + cb' - bc'$$

となるが，これらは A の □ の行列式が $a'' - b''\boldsymbol{i}$ である等の3つの関係を示している．A の行列式を計算するために，$\det A$ の第3列で展開すると

$$\det A = (a'' + b''\boldsymbol{i})(a'' - b''\boldsymbol{i}) + (c'' + d''\boldsymbol{i})(c'' - d''\boldsymbol{i}) + (e'' + f''\boldsymbol{i})(e'' - f''\boldsymbol{i})$$
$$= a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 + e''^2 + f''^2 = 1$$

となる．以上で $A \in SU(3)$ が示された．逆に $A \in SU(3)$ に対して上記の行列 x をつくると $x(e_1) = e_1$ で，かつ $x \in G_2$ であることが確かめられる．すなわち $x \in H_1$ である．以上で定理が証明された．

例 5.1　G_2 の部分群 $H_{12} = \{x \in G_2 \mid x(e_1) = e_1,\ x(e_2) = e_2\}$ は $SU(2)$ に(位相)群同型である：

$$SU(2) \subset G_2$$

実際，$x \in H_{12}$ ならば $x(e_3) = x(e_1 e_2) = x(e_1)x(e_2) = e_1 e_2 = e_3$ となる．したがって定理5.2において $a = 1,\ b = c = d = e = f = 0$ とした場合(このとき当然 $a' = b' = a'' = b'' = 0$ となる)と考えるとよい．

定 理 5.3　等質空間 $G_2/SU(3)$ は6次元球面 S^6 に同相である：

$$G_2/SU(3) \simeq S^6$$

証 明　$S^6 = \{a \in \mathfrak{C} \mid \mathrm{Re}\,a = 0,\ |a| = 1\}$ とおくと S^6 は6次元球面である．G_2 は $O(7)$ の部分群である(補題5.1)から G_2 は S^6 に働く．この働き方が推移的であることを示そう．

$a_1 \in S^6$ を与える．

$a_2 \in S^6$ を $(a_1, a_2) = 0$ をみたす任意の元とする．

$a_3 = a_1 a_2$ とおくと，$a_3 \in S^6$ であって $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$ をみたす(証明は下記)．

$a_4 \in S^6$ を $(a_1, a_4) = (a_2, a_4) = (a_3, a_4) = 0$ をみたす任意の元とする．

$a_5 = a_1 a_4, \quad a_6 = a_4 a_2, \quad a_7 = a_1 a_6$ とおく．

このとき $a_0 = 1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基になる．実際，$|a_i| = 1$ は明らかであるが，$(a_i, a_j) = 0,\ i \neq j$ を確かめねばならない．確かめる回数は ${}_8C_2 = 28$ 回であ

るが，ここではつぎの3つを例として示しておくにとどめる（208頁公式参照）．

$$(a_1, a_3) = (a_1, a_1a_2) = (a_1, a_1)(1, a_2) = 0$$
$$(a_3, a_6) = (a_1a_2, a_4a_2) = (a_1, a_4)(a_2, a_2) = 0$$
$$(a_5, a_6) = (a_1a_4, a_4a_2) = (a_1a_4, -a_2a_4) = -(a_1, a_2)(a_4, a_4) = 0$$

等である．さて $e_0 = 1, e_1, \cdots, e_7$; $a_0 = 1, a_1, \cdots, a_7$ はともに $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基であるから，$\boldsymbol{R}$-同型写像 $x: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$x(e_i) = a_i \qquad i = 0, 1, \cdots, 7$$

をみたすようにとると $x \in O(7)$ となる．さらに $x \in G_2$ である．すなわち x は

$$x(uv) = x(u)x(v) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたしている．実際，これを示すためには

$$x(e_ie_j) = x(e_i)x(e_j) \qquad i, j = 0, 1, \cdots, 7$$

がなりたつことを確かめると十分である．これも数多く確かめなければならないが（$1 \leqq i < j \leqq 7$ のときを示すとよいので ${}_7C_2 = 21$ 回でよい），ここではつぎの3つを例としてあげておくにとどめる（208頁公式参照）．

$$x(e_1)x(e_3) = a_1a_3 = a_1(a_1a_2) = -a_2 = -x(e_2) = x(e_1e_3)$$
$$x(e_2)x(e_5) = a_2a_5 = a_2(a_1a_4) = a_1(a_4a_2) = a_1a_6 = a_7 = x(e_7) = x(e_2e_5)$$
$$x(e_3)x(e_5) = a_3a_5 = (a_1a_2)(a_1a_4) = -(a_1a_2)(a_4a_1) = -a_1(a_2a_4)a_1$$
$$= a_1(a_4a_2)a_1 = a_1a_6a_1 = -a_1a_1a_6 = a_6 = x(e_6) = x(e_3e_5)$$

等である．よって $x \in G_2$ であり，かつ $x(e_1) = a_1$ である．以上で G_2 が S^6 に推移的に働くことが証明された．$e_1 \in S^6$ における G_2 の等方群は $SU(3)$ である（定理5.2）．よって，G_2 がコンパクト群である（補題5.1）ことに注意すると，命題1.58より位相同型 $G_2/SU(3) \simeq S^6$ を得る．

S^6, $SU(3)$ はともに単連結で，それぞれ 6, 8 次元多様体である（定理4.9）から，つぎの定理を得る（命題1.59）．

定理 5.4 G_2 は単連結なコンパクト14次元 Lie 群である．

G_2 は弧状連結群であるから，G_2 は $O(7)$ の単位元を含む弧状連結成分 $SO(7)$（[21] 定理20 (2)）に含まれる．したがって G_2 は $SO(7)$ の部分群である：

$$G_2 \subset SO(7)$$

例 5.2 正の整数 $m \leqq n$ を固定し，$\boldsymbol{R}^n$ における正規直交系 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ $((\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) =$

δ_{ij}, a_i, $a_j \in R^n$) 全体の集合を $V_{n,m}$ で表わし，$V_{n,m}$ を **Stiefel 多様体**[†] という．このとき位相同型 $O(n)/O(n-m) \simeq V_{n,m}$ がなりたつことがよく知られている．ここでは，つぎの位相同型

$$G_2/SU(2) \simeq V_{7,2}$$

が存在することを示そう．$\mathfrak{C}_0 = \{u \in \mathfrak{C} \mid \mathrm{Re}\, u = 0\}$ とおくと $\mathfrak{C}_0$ は 7 次元 R-加群である．$V_{7,2}$ を $\mathfrak{C}_0$ における正規直交系 $\{a_1, a_2\}$ 全体のつくる Stiefel 多様体とする．G_2 は $O(7)$ の部分群であるから，明らかに $x \in G_2$, $\{a_1, a_2\} \in V_{7,2}$ ならば $\{x(a_1), x(a_2)\} \in V_{7,2}$ である．よって G_2 は $V_{7,2}$ に働いている．さらに G_2 は $V_{7,2}$ に推移的に働いている．実際，定理 5.3 における $x \in G_2$ のつくり方は，$a_1, a_2 \in S^6$ を $(a_1, a_2) = 0$ の条件のもとで任意に与えておいてよかったので，与えられた $\{a_1, a_2\} \in V_{7,2}$ に対して $x(e_1) = a_1$, $x(e_2) = a_2$ となる $x \in G_2$ が存在するからである．$\{e_1, e_2\} \in V_{7,2}$ における G_2 の等方群は $SU(2)$ である（例 5.1）．よって，G_2 がコンパクト群である（補題 5.1）ことに注意すると，命題 1.58 より位相同型 $G_2/SU(2) \simeq V_{7,2}$ を得る．

（4）G_2 の極大トーラスと Weyl 群

G_2 の階数が 2 であることを示すために，位相幾何学の不動点定理を用いることにする (E. H. Spanier: Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1966, p. 195, Theorem 7).

命題 5.5（**Lefschetz の不動点定理**）M をコンパクト（n 次元）多様体とし，そのホモロジー群 $H(M) = \bigoplus_{i=0}^{n} H_i(M)$ が自由加群であるとする．連続写像 $f\colon M \to M$ は加群準同型写像 $f_{*i}\colon H_i(M) \to H_i(M)$ を誘導するが，もし **Lefschetz 数** とよばれる整数

$$L(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{tr}(f_{*i})^{\dagger\dagger}$$

が 0 でない：$L(f) \neq 0$ ならば，f は不動点 $a_0 \in M$ をもつ：$f(a_0) = a_0$.

定理 5.6 G_2 の階数は 2 である：$\mathrm{rank}\, G_2 = 2$. したがって

---

† $V_{n,m}$ は $M(n, m, R)$ の部分集合とみなせるので，$V_{n,m}$ は距離空間 $M(n, m, R)$ の部分空間として位相空間である．

†† A を有限個の基 $s_1, \cdots, s_n$ をもつ自由加群とし，$f\colon A \to A$ を加群準同型写像とする．$f(s_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} s_j$, $m_{ij} \in Z$, $i=1, \cdots, n$ であるとするとき，$\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ と定義する．

$$T = \left\{ \begin{array}{l} t = t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & & \\ & & & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & & \\ & & & & & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ & & & & & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \\ \theta_i \in \boldsymbol{R} \end{array} \right\}$$

は G_2 の極大トーラスである．

証 明　6 次元球面 S^6 のホモロジー群は

$$H_0(S^6) = \boldsymbol{Z}, \quad H_6(S^6) = \boldsymbol{Z}, \quad H_i(S^6) = 0 \qquad i \neq 0, 6$$

である（[21] 例 171）．さて元 $x \in G_2$ をとり固定する．$S^6 \simeq G_2/SU(3)$ である（定理 5.3）から，x は同相写像

$$x: S^6 \to S^6$$

を誘導する．したがって x は加群同型写像 $x_{*i}: H_i(S^6) \to H_i(S^6)$ をひきおこすが，$x \in G_2 \subset SO(7)$ であるから，S^6 の方向付けを変えない．したがって $H_0(S^6)$, $H_6(S^6)$ の生成元 s_0, s_6 に対して $x_{*0}(s_0) = s_0$, $x_{*6}(s_6) = s_6$ となる．よって写像 $x: S^6 \to S^6$ の Lefschetz 数 $L(x)$ は

$$L(x) = (-1)^0 1 + (-1)^6 1 = 2 \neq 0$$

となり 0 と異なる．したがって写像 $x: S^6 \to S^6$ は不動点 $a_0 \in S^6$ をもつ（命題 5.5）:

$$x(a_0) = a_0$$

しかるに G_2 は S^6 に推移的に働いている（定理 5.3）ので，a_0 に対して $y(e_1) = a_0$ となる $y \in G_2$ が存在する．このとき $x(y(e_1)) = x(a_0) = a_0 = y(e_1)$，よって $(y^{-1}xy)(e_1) = e_1$ となる．したがって

$$y^{-1}xy \in SU(3)$$

である（定理 5.2）．しかるに $SU(3)$ の階数は 2 である（定理 4.10 (1)）から，$SU(3)$ の 2 次元トーラス T に対して元 $z \in SU(3)$ をとり，$z^{-1}(y^{-1}xy)z \in T$，すなわち $x \in (yz)T(yz)^{-1}$ とすることができる．よって $G_2 = \bigcup_{y \in G_2} yTy^{-1}$ となり，G_2 の階数が 2 であることが示された．$SU(3)$, G_2 の階数はともに 2 であることがわかったから，$SU(3)$ の極大トーラス T は G_2 の極大トーラスでもある．いま $SU(3)$ に定理 4.10 (1) の極大ト

ーラス

$$T=\left\{t=t(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\begin{pmatrix}e^{i\theta_1}&&\\&e^{i\theta_2}&\\&&e^{i\theta_3}\end{pmatrix}\middle|\,\theta_1+\theta_2+\theta_3=0,\ \theta_i\in\boldsymbol{R}\right\}$$

をとり，これを G_2 の元として表示する（210頁）と定理の T の形になる．

定 理 5.7　G_2 の Weyl 群 $W(G_2)$ は，$SU(3)$ の Weyl 群 $W(SU(3))\cong\mathfrak{S}_3$ と位数2の群 S^0 の直積に群同型である：

$$W(G_2)\cong W(SU(3))\times S^0$$

とくに $W(G_2)$ は位数 $3!\times 2=12$ の群である．

証 明　G_2 の極大トーラス T を定理5.6に示したようにとり，元 $x\in G_2$ が $x\in N_T(G_2)$ であるとする．このとき

$$x(e_1)=e_1,\quad x(e_1)=-e_1$$

のいずれかがなりたつ．実際，$x^{-1}Tx=T\subset SU(3)$ であるから，任意の $t\in T$ に対して $(x^{-1}tx)(e_1)=e_1$，すなわち $t(x(e_1))=x(e_1)$ がなりたつ．$x(e_1)=\sum_{i=1}^{7}e_i\alpha_i$, $\alpha_i\in\boldsymbol{R}$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{7}t(e_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{7}e_i\alpha_i$$

となる．いま $t=t(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ としてこの式を計算すると

$$\begin{aligned}&e_1\alpha_1+(e_2\cos\theta_1+e_3\sin\theta_1)\alpha_2+(-e_2\sin\theta_1+e_3\cos\theta_1)\alpha_3\\&\qquad+(e_4\cos\theta_2+e_5\sin\theta_2)\alpha_4+(-e_4\sin\theta_2+e_5\cos\theta_2)\alpha_5\\&\qquad+(e_6\cos\theta_3+e_7\sin\theta_3)\alpha_6+(-e_6\sin\theta_3+e_7\cos\theta_3)\alpha_7\\&=e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_3\alpha_3+e_4\alpha_4+e_5\alpha_5+e_6\alpha_6+e_7\alpha_7\end{aligned}$$

となる．e_2, e_4, e_6 の係数を比較すると

$$\begin{cases}\alpha_2\cos\theta_1-\alpha_3\sin\theta_1=\alpha_2\\\alpha_4\cos\theta_2-\alpha_5\sin\theta_2=\alpha_4\\\alpha_6\cos\theta_3-\alpha_7\sin\theta_3=\alpha_6\end{cases}$$

が任意の $\theta_1,\theta_2\in\boldsymbol{R}\,(\theta_3=-\theta_1-\theta_2)$ に対してなりたつ．これらより $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=\alpha_7=0$ がわかる．よって $x(e_1)=e_1\alpha_1$ の形である．しかるに $1=|e_1|=|x(e_1)|=|e_1\alpha_1|=|\alpha_1|$ であるから $\alpha_1=\pm1$，よって $x(e_1)=\pm e_1$ となる．さて $x\in N_T(G_2)$ が $x(e_1)=e_1$ をみたせば $x\in SU(3)$ であるから，$x\in N_T(SU(3))$ となる．よって W

$(G_2)=N_T(G_2)/T$ は $SU(3)$ の Weyl 群 $W(SU(3))=N_T(SU(3))/T$ を部分群として含んでいる: $W(SU(3))\subset W(G_2)$. S^0 を2つの元1, -1 のつくる群（例1.31）として, 写像 p: $W(G_2)\to S^0$ を

$$p([x])=\begin{cases} 1 & x(e_1)=e_1 \text{ のとき} \\ -1 & x(e_1)=-e_1 \text{ のとき}\end{cases}$$

と定義すると, p は群準同型写像となる. この p が全射であることを示そう.

$$y=\begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}\in SO(7)$$

とおくと $y\in G_2$ である. さらに $y\in N_T(G_2)$ であり, $y^2=1$, $y(e_1)=-e_1$ をみたしている. この y は $p([y])=-1$ をみたすので p は全射である. つぎに p: $W(G_2)\to S^0$ の核が $W(SU(3))$ であることを示そう. 実際, $[x]\in W(G_2)$, $x\in N_T(G_2)$ が $p([x])=1$ であるとすると $x(e_1)=e_1$ であるから $x\in N_T(SU(3))$, よって $[x]\in W(SU(3))$ となる. 以上より

$$1\to W(SU(3))\xrightarrow{j} W(G_2)\underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} S^0\longrightarrow 1$$

（j は包含写像）は完全系列であることがわかった. つぎに, この系列が分裂していることを示そう. 写像 s: $S^0\to W(G_2)$ を

$$s(1)=[1],\quad s(-1)=[y]$$

と定義すると, $[y]^2=1$ であるから s は群準同型写像であって $ps=1$ をみたす. よって系列は分裂している. $W(G_2)$ において $[y]$ より生成される部分群を同じ記号 S^0 で表わすことにすると, $[y]^2=1$ より S^0 は位数2の群になる. そして $W(G_2)$ は $W(SU(3))$ を正規部分群として含み, $W(G_2)$ は $W(SU(3))$ と S^0 の半直積になる（補題1.51(2)).

$$W(G_2)=W(SU(3))S^0,\quad W(SU(3))\cap S^0=1$$

つぎに $[y]$ が $W(SU(3))$ の各元と可換であることを示そう. そのためには, $[y]$ が群 $W(SU(3))\cong\mathfrak{S}_3$（定理4.10 (2)）の生成元 $[x_{12}]$, $[x_{23}]$,（ここに x_{12}, $x_{23}\in SU(3)$ は

$$x_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad x_{23}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

とする）と可換であることを示すと十分である．さて，この行列 $x_{12}\in SU(3)$ を $G_2\subset SO(7)$ の元とみなして表示する（210頁）と

$$x_{12}=\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc}1&&&&&&\\\hline&&&1&&&\\&&&&1&&\\\hline&1&&&&&\\&&1&&&&\\\hline&&&&&-1&\\&&&&&&-1\end{array}\right)$$

となるから，行列の計算より $yx_{12}=x_{12}y$ がわかる．よって $W(G_2)$ において

$$[y][x_{12}]=[x_{12}][y]$$

がなりたつ．同様に $[y][x_{23}]=[x_{23}][y]$ となるから，$[y]$ は $W(SU(3))$ の各元と可換である．したがって $[y]$ から生成される部分群 S^0 は $W(G_2)$ の正規部分群となる．よって $W(G_2)$ は $W(SU(3))$ と S^0 の直積群である（54頁）: $W(G_2)=W(SU(3))\times S^0$.

（5） G_2-C-加群 $\mathfrak{C}_0{}^C$

$$\mathfrak{C}_o=\{u\in\mathfrak{C}\,|\,\mathrm{Re}u=0\}=\{u\in\mathfrak{C}\,|\,(u,\ e_0)=0\}$$

とおくと $\mathfrak{C}_0$ は7次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．さらに $x\in G_2$, $u\in\mathfrak{C}_0$ ならば $x(u)\in\mathfrak{C}_0$ となるから，$\mathfrak{C}_0$ は G_2-$\boldsymbol{R}$-加群である．したがって，その複素化 $\mathfrak{C}_0{}^C$ は G_2-$\boldsymbol{C}$ 加群になる．T を定理5.6に示した G_2 の極大トーラスとし，$j: T\to G_2$ を包含写像とする．$\mathfrak{C}_0{}^C$ を T-$\boldsymbol{C}$-加群とみて既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解しよう．

補 題 5.8　　$j^*(\mathfrak{C}_0{}^C)=\boldsymbol{C}\oplus W_1\oplus\hat{W}_1\oplus W_2\oplus\hat{W}_2\oplus W_3\oplus\hat{W}_3$

ここに W_i, $i=1,2,3$ は1次元既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群であり，$\hat{W}_i$ は W_i の双対 T-$\boldsymbol{C}$-加群とする．W_1, W_2, W_3 の間には

$$W_1\otimes W_2\otimes W_3\cong\boldsymbol{C}$$

の関係がある．

証 明　$\mathfrak{C}_0{}^C$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ.

$$h = e_1 \otimes 1$$

$$u_i = e_{2i} \otimes 1 - e_{2i+1} \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{u}_i = -e_{2i} \otimes \boldsymbol{i} + e_{2i+1} \otimes 1 \qquad i = 1, 2, 3$$

このとき $t = t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in T$ に対して

$$th = h$$

$$tu_i = u_i e^{i\theta_i}, \quad t\hat{u}_i = \hat{u}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

がなりたつ.（この計算は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{R}^{2n+1})^C$ のとき（166 頁）と同じである）. よって $h, u_i, \hat{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ より生成される $\mathfrak{C}_0{}^C$ の 1 次元部分 $\boldsymbol{C}$-加群をそれぞれ $\boldsymbol{C}, W_i, \hat{W}_i$ とすると補題を得る.

$$\phi_T(W_i) = z_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\begin{array}{ccc} M(G_2) & \xrightarrow{j^\#} & M(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{G_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_T} \\ R(G_2) & \xrightarrow{j^*} & R(T) \end{array}$$

とおくと

$$R(T) = \boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, z_3, z_3^{-1}]/(z_1 z_2 z_3 - 1)$$

がなりたつ（146 頁）. そして補題 5.8 を用いると, $R(T)$ においてつぎの命題がなりたつ.

命 題 5.9　　$j^*(\mathfrak{C}_0{}^C) = 1 + z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1}$ （$=\lambda_1$ とおく）

$$j^*(\Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^C)) = 3 + 2(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1})$$
$$+ z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} z_2 + z_2 z_3^{-1} + z_2^{-1} z_3 + z_3 z_1^{-1} + z_3^{-1} z_1 \quad (=\lambda_2 \text{ とおく})$$

がなりたつ. したがって

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3$$

$$\sigma_2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1}$$

とおくならば

$$\lambda_1 = 1 + \sigma_1 + \sigma_2, \quad \lambda_2 = 2(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2$$

となる.

証 明　$j^*(\mathfrak{C}_0{}^C) = \lambda_1$ は補題 5.8 の結果である. つぎに $j^*(\Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^C))$ の計算は補題 2.15 を用いると（λ_1 より項を 2 組取り出して掛けて加える）

$$\begin{aligned} j^*(\Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^C)) &= z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1} + 1 + z_1 z_2 + z_1 z_2^{-1} + z_1 z_3 + z_1 z_3^{-1} \\ &\quad + z_1^{-1} z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1^{-1} z_3 + z_1^{-1} z_3^{-1} + 1 + z_2 z_3 + z_2 z_3^{-1} + z_2^{-1} z_3 \\ &\quad + z_2^{-1} z_3^{-1} + 1 \\ &= z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1} + 1 + z_3^{-1} + z_1 z_2^{-1} + z_2^{-1} + z_1 z_3^{-1} \\ &\quad + z_1^{-1} z_2 + z_3 + z_1^{-1} z_3 + z_2 + 1 + z_1^{-1} + z_2 z_3^{-1} + z_2^{-1} z_3 + z_1 + 1 \end{aligned}$$

$$= 3 + 2(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1}) + z_1z_2^{-1} + z_1^{-1}z_2 + z_2z_3^{-1} + z_2^{-1}z_3 + z_3z_1^{-1} + z_3^{-1}z_1 = \lambda_2$$

となる．つぎに

$$\sigma_1 + \sigma_2 = z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_3 + z_3^{-1}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = 3 + z_1z_2^{-1} + z_1^{-1}z_2 + z_2z_3^{-1} + z_2^{-1}z_3 + z_3z_1^{-1} + z_3^{-1}z_1$$

であるから，$\lambda_1 = 1 + \sigma_1 + \sigma_2$, $\lambda_2 = 2(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2$ となる．

(６) 再び $R(SU(3))$ について

$C_0{}^C$ において C-基 $h, u_1, u_2, u_3, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ をとり（記号は補題5.8の証明と同じ），u_1, u_2, u_3；$\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ より生成される3次元 C-加群をそれぞれ S_1, S_2 とすると，S_1, S_2 は $SU(3)$-C-加群になる．実際，$e_{2i+1} = e_1e_{2i}$, $e_1e_{2i+1} = -e_{2i}$, $i = 1, 2, 3$ に注意すると，$x \in SU(3)$ に対して

$$xu_i = x(e_{2i} \otimes 1 - e_{2i+1} \otimes \boldsymbol{i}) = x(e_{2i}) \otimes 1 - x(e_{2i+1}) \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= x(e_{2i}) \otimes 1 - e_1x(e_{2i}) \otimes \boldsymbol{i} \quad (x(e_{2i+1}) = x(e_1e_{2i}) = x(e_1)x(e_{2i}) = e_1x(e_{2i}))$$

$x(e_{2i}) = \sum_{j=1}^{3} e_{2j}\alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{3} e_{2j+1}\alpha_{2j+1}$, $\alpha_{2j}, \alpha_{2j+1} \in \boldsymbol{R}$ とおくと

$$= (\sum_{j=1}^{3} e_{2j}\alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{3} e_{2j+1}\alpha_{2j+1}) \otimes 1 - (\sum_{j=1}^{3} e_{2j+1}\alpha_{2j} - \sum_{j=1}^{3} e_{2j}\alpha_{2j+1}) \otimes \boldsymbol{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} e_{2j} \otimes \alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{3} e_{2j+1} \otimes \alpha_{2j+1} - \sum_{j=1}^{3} e_{2j+1} \otimes \boldsymbol{i}\,\alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{3} e_{2j} \otimes \boldsymbol{i}\,\alpha_{2j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (e_{2j} \otimes 1 - e_{2j+1} \otimes \boldsymbol{i})\alpha_{2j} + \sum_{j=1}^{3} (e_{2j} \otimes 1 - e_{2j+1} \otimes \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}\,\alpha_{2j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} u_j(\alpha_{2j} + \boldsymbol{i}\,\alpha_{2j+1}) \in S_1$$

となる．よって S_1 は $SU(3)$-C-加群である．同様に S_2 も $SU(3)$-C-加群である．$j^*: R(SU(3)) \to R(T)$ において

$$j^*(S_1) = \sigma_1, \quad j^*(S_2) = \sigma_2$$

とおくとき

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \sigma_2 = z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2$$

となることは補題5.8の証明の中で示されている．これらは定理4.13の $\Lambda^1(C^3)$, $\Lambda^2(C^3)$ にそれぞれ対応しているので

$$R(SU(3)) = R(T)^{W(SU(3))} = \boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$$

を得る．

(7) G_2 の複素表現環

Weyl 群 $W(G_2)=W(SU(3))\times S^0$ は $R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, z_3, z_3^{-1}]/[z_1z_2z_3-1)$ に働いている．その働き方は，$W(SU(3))\cong\mathfrak{S}_3$ の各元は z_1, z_2, z_3 の置換をひきおこし（定理 4.10 の証明参照），S^0 の生成元 $[y]$ は変換 $(z_1, z_2, z_3)\to(z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1})$ をひきおこしている（定理 5.7 の証明参照）．さて包含関係

$$R(G_2)\subset R(T)^{W(G_2)}$$

において，$R(G_2)$ は G_2-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{C}_0{}^C$ からつくられた 2 つの元 λ_1, λ_2 をもっている．$R(G_2)$ が（そのために $R(T)^{W(G_2)}$ が）λ_1, λ_2 より環として生成されることを示そう．

$$R(T)^{W(G_2)}=(R(T)^{W(SU(3))})^{S^0}\ (\text{補題 1.52})=(\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2])^{S^0}$$

であり，$\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$ における $[y]\in S^0$ の作用は

$$[y](\sigma_1)=[y](z_1+z_2+z_3)=z_1^{-1}+z_2^{-1}+z_3^{-1}=\sigma_2,\ [y](\sigma_2)=\sigma_1$$

であるから，$(\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2])^{S^0}$ の元は σ_1, σ_2 に関する対称式のことである（例 1.34）．よって $(\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2])^{S^0}$ の元は σ_1, σ_2 の基本対称式 $\sigma_1+\sigma_2, \sigma_1\sigma_2$ の多項式で表わされる（命題 4.3 (2)）．しかるに

$$\sigma_1+\sigma_2=\lambda_1-1, \quad \sigma_1\sigma_2=\lambda_2-2\lambda_1+2$$

（命題 5.9）であるから，$R(T)^{W(G_2)}$ の元は λ_1, λ_2 の多項式で表わされる．よって $R(G_2)=R(T)^{W(G_2)}$ となり，$R(G_2)$ が λ_1, λ_2 より環として生成されることがわかった．

つぎに λ_1, λ_2 が代数的独立であることを示そう．σ_1, σ_2 は代数的独立であるから，その基本対称式 $\sigma_1+\sigma_2, \sigma_1\sigma_2$ も代数的独立である（命題 4.3 (3)）．しかるに $\lambda_1=\sigma_1+\sigma_2+1, \lambda_2=2(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2$ とかける（命題 5.9）から，λ_1, λ_2 も代数的独立である．以上よりつぎの定理を得る．

定理 5.10 G_2 の複素表現環 $R(G_2)$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ に環同型である：

$$R(G_2)=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{C}_0{}^C), \Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^C)]$$

つぎの定理は命題 5.9 より明らかである．

定理 5.11 $k: SU(3)\to G_2$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

$$k^*: R(G_2)=\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]\to R(SU(3))=\boldsymbol{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$$

は

$$k^*(\lambda_1)=1+\sigma_1+\sigma_2, \quad k^*(\lambda_2)=2(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2$$

で与えられる．

(8) G_2 の実表現環

G_2-$\boldsymbol{R}$-加群 $\Lambda^1(\mathfrak{C}_0)$, $\Lambda^2(\mathfrak{C}_0)$ の複素化 G_2-$\boldsymbol{C}$-加群 $\Lambda^1(\mathfrak{C}_0{}^C)$, $\Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^C)$ を含む類が $R(G_2)$ の環としての生成元であった．よって命題 3.4 を用いると G_2 の実表現環が決定される．

定理 5.12 G_2 の実表現環 $RO(G_2)$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ に環同型である：

$$RO(G_2) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{C}_0), \Lambda^2(\mathfrak{C}_0)]$$

§2. G_2 の Lie 環と無限小 3 対原理

(1) $\mathfrak{D}_4$ における外部自己同型写像

$$(Xu, v) + (u, Xv) = 0 \qquad u, v \in \mathfrak{C} \tag{i}$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $X: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 全体の集合を $\mathfrak{D}_4$ で表わす．$\mathfrak{D}_4$ において Lie 積を $[X, Y] = XY - YX$ と定義すると，$\mathfrak{D}_4$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．$\mathfrak{C}$ の $\boldsymbol{R}$-基 $1, e_1, e_2, \cdots, e_7$ を用いて $X \in \mathfrak{D}_4$ を行列 $X \in M(8, \boldsymbol{R})$ で表わすと，(i) の条件は ${}^tX + X = 0$ の条件に対応するので，この $\mathfrak{D}_4$ は $SO(8)$ の Lie 環 $\mathfrak{D}_4$

$$\mathfrak{D}_4 = \{X \in M(8, \boldsymbol{R}) \mid {}^tX = -X\}$$

と $\boldsymbol{R}$-Lie 環として同型になる．したがって以後この 2 つの $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ を同一視することにする．

$\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-Lie 環同型写像 $\rho: \mathfrak{D}_4 \to \mathfrak{D}_4$ を $\mathfrak{D}_4$ の**自己同型写像**ということにし，$\mathfrak{D}_4$ の自己同型写像全体のつくる群を $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ で表わす．

$\mathfrak{D}_4$ の**外部自己同型写像**とよばれる $\kappa, \pi, \nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ を定義するために，まず，つぎの $F_{ij} \in \mathfrak{D}_4$, $i, j = 0, 1, \cdots, 7$, $i \neq j$ を定義することから始めよう．写像 $F_{ij}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$i \neq 0 \text{ のとき} \qquad F_{i0}u = \frac{1}{2}e_iu, \quad F_{0i}u = -\frac{1}{2}e_iu \qquad u \in \mathfrak{C}$$

$$i \neq j,\ i \neq 0,\ j \neq 0 \text{ のとき} \qquad F_{ij}u = \frac{1}{2}e_j(e_iu) \qquad u \in \mathfrak{C}$$

と定義すると $F_{ij} \in \mathfrak{D}_4$ である．実際，まず F_{ij} が $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $F_{ij}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ であることは明らかである．つぎに $u, v \in \mathfrak{C}$ に対して

$$(F_{i0}u, v) = \frac{1}{2}(e_iu, v) = \frac{1}{2}(u, \bar{e}_iv) = -\frac{1}{2}(u, e_iv) = -(u, F_{i0}v)$$

$$(F_{ij}u, v) = \frac{1}{2}(e_j(e_iu), v) = -\frac{1}{2}(e_iu, e_jv) = \frac{1}{2}(u, e_i(e_jv))$$

$$= -\frac{1}{2}(u,\ e_j(e_iv)) = -(u,\ F_{ij}v)$$

となるから $F_{ij} \in \mathfrak{D}_4$ である.

例 5.3 $\mathfrak{D}_4$ の元 F_{ij} は, $\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基 G_{ij}, $i, j = 0, 1, \cdots, 7$, $i<j$ (201頁参照) の1次結合で表わされる筈であるから, 実際にかいておこう. $F_{ij} = -F_{ji}$ であるから F_{ij}, $i<j$ の表だけで十分である.

$$\begin{cases} 2F_{01} = G_{01} + G_{23} + G_{45} + G_{67} \\ 2F_{23} = G_{01} + G_{23} - G_{45} - G_{67} \\ 2F_{45} = G_{01} - G_{23} + G_{45} - G_{67} \\ 2F_{67} = G_{01} - G_{23} - G_{45} + G_{67} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2F_{02} = G_{02} - G_{13} - G_{46} + G_{57} \\ 2F_{13} = -G_{02} + G_{13} - G_{46} + G_{57} \\ 2F_{46} = -G_{02} - G_{13} + G_{46} + G_{57} \\ 2F_{57} = G_{02} + G_{13} + G_{46} + G_{57} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{03} = G_{03} + G_{12} + G_{47} + G_{56} \\ 2F_{12} = G_{03} + G_{12} - G_{47} - G_{56} \\ 2F_{47} = G_{03} - G_{12} + G_{47} - G_{56} \\ 2F_{56} = G_{03} - G_{12} - G_{47} + G_{56} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2F_{04} = G_{04} - G_{15} + G_{26} - G_{37} \\ 2F_{15} = -G_{04} + G_{15} + G_{26} - G_{37} \\ 2F_{26} = G_{04} + G_{15} + G_{26} + G_{37} \\ 2F_{37} = -G_{04} - G_{15} + G_{26} + G_{37} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{05} = G_{05} + G_{14} - G_{27} - G_{36} \\ 2F_{14} = G_{05} + G_{14} + G_{27} + G_{36} \\ 2F_{27} = -G_{05} + G_{14} + G_{27} - G_{36} \\ 2F_{36} = -G_{05} + G_{14} - G_{27} + G_{36} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2F_{06} = G_{06} - G_{17} - G_{24} + G_{35} \\ 2F_{17} = -G_{06} + G_{17} - G_{24} + G_{35} \\ 2F_{24} = -G_{06} - G_{17} + G_{24} + G_{35} \\ 2F_{35} = G_{06} + G_{17} + G_{24} + G_{35} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2F_{07} = G_{07} + G_{16} + G_{25} + G_{34} \\ 2F_{16} = G_{07} + G_{16} - G_{25} - G_{34} \\ 2F_{25} = G_{07} - G_{16} + G_{25} - G_{34} \\ 2F_{34} = G_{07} - G_{16} - G_{25} + G_{34} \end{cases}$$

なお, この表より F_{ij}, $i<j$ も $\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基であることがわかる.

定 義 (1) 写像 $\kappa: \mathfrak{D}_4 \to \mathfrak{D}_4$ を

$$(\kappa(X))u = \overline{X\overline{u}} \qquad X \in \mathfrak{D}_4,\ u \in \mathfrak{C}$$

と定義する.

(2) 写像 $\pi: \mathfrak{D}_4 \to \mathfrak{D}_4$ を

$$\pi(G_{ij}) = F_{ij} \qquad i, j = 0, 1, \cdots, 7,\ i<j$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-準同型写像と定義する.

(3) 写像 $\nu: \mathfrak{D}_4 \to \mathfrak{D}_4$ を

$$\nu = \pi\kappa$$

と定義する．

命 題 5.13 κ, π, ν は $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ の自己同型写像である：$\kappa, \pi, \nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$.

証 明 $\kappa: \mathfrak{D}_4 \to \mathfrak{D}_4$ は $\kappa\kappa = 1$ をみたすから $\boldsymbol{R}$-同型写像である．さらに $u \in \mathfrak{C}$ に対して

$$[\kappa(X), \kappa(Y)]u = \kappa(X)((\kappa(Y))u) - \kappa(Y)((\kappa(Y))u) = \overline{X((\overline{\kappa(Y))u})} - \overline{Y((\overline{\kappa(X))u})}$$
$$= \overline{(XY)\overline{u}} - \overline{(YX)\overline{u}} = (\kappa(XY - YX))u = (\kappa[X, Y])u$$

となるから $\kappa \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ である．つぎに π は $\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基 G_{ij}, $i<j$ を $\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基 F_{ij}, $i<j$（例5.3）に移すので $\boldsymbol{R}$-同型写像である（補題1.4）．さて π が $\mathfrak{D}_4$ の自己同型写像であることを示すには

$$[\pi(G_{ij}), \pi(G_{kl})] = \pi[G_{ij}, G_{kl}]$$

をいうとよい．そのためには

$$[F_{ij}, F_{jk}] = F_{ik} \qquad i, j, k \text{ は相異なる}$$
$$[F_{ij}, F_{kl}] = 0 \qquad i, j, k, l \text{ は相異なる}$$

を示すと十分である．以下の計算では i, j, k, l はすべて相異なり，かつ $i, j, k, l \neq 0$ とし，また $u \in \mathfrak{C}$ とする（208 頁の公式参照）．

$$[F_{i0}, F_{0k}]u = (F_{i0}F_{0k} - F_{0k}F_{i0})u = -\frac{1}{4}e_i(e_ku) + \frac{1}{4}e_k(e_iu) = \frac{1}{2}e_k(e_iu) = F_{ik}u$$

$$[F_{i0}, F_{kl}]u = (F_{i0}F_{kl} - F_{kl}F_{i0})u = \frac{1}{4}e_i(e_l(e_ku)) - \frac{1}{4}e_l(e_k(e_iu))$$

$$= -\frac{1}{4}e_l(e_i(e_ku)) + \frac{1}{4}e_l(e_i(e_ku)) = 0$$

$$[F_{ij}, F_{jk}]u = (F_{ij}F_{jk} - F_{jk}F_{ij})u = \frac{1}{4}e_j(e_i(e_k(e_ju))) - \frac{1}{4}e_k(e_j(e_j(e_iu)))$$

$$= \frac{1}{4}e_i(e_k(e_j(e_ju))) + \frac{1}{4}e_k(e_iu) = -\frac{1}{4}e_i(e_ku) + \frac{1}{4}e_k(e_iu)$$

$$= \frac{1}{2}e_k(e_iu) = F_{ik}u$$

$$[F_{ij}, F_{kl}]u = (F_{ij}F_{kl} - F_{kl}F_{ij})u = \frac{1}{4}e_j(e_i(e_l(e_ku))) - \frac{1}{4}e_l(e_k(e_j(e_iu)))$$

$$= \frac{1}{4}e_j(e_k(e_i(e_lu))) - \frac{1}{4}e_j(e_l(e_k(e_iu))) = \cdots = 0$$

よって $\pi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ である．最後に ν は $\nu = \pi\kappa$ であるから $\nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ である．

定 義 元 $a\in\mathfrak{C}$ に対し，3つの写像 $L_a, R_a, T_a : \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ をそれぞれ

$$L_a u = au, \quad R_a u = ua, \quad T_a u = au + ua = (L_a + R_a)u \qquad u\in\mathfrak{C}$$

と定義する．$L_a, R_a, T_a : \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ はいずれも $\boldsymbol{R}$-準同型写像である．

補 題 5.14 $a\in\mathfrak{C}$, $\mathrm{Re}\,a=0$ に対して，つぎの (1) ~ (4) がなりたつ．

(1) $L_a, R_a, T_a \in \mathfrak{D}_4$

(2) $\kappa(L_a) = -R_a$, $\kappa(R_a) = -L_a$, $\kappa(T_a) = -T_a$

(3) $\pi(L_a) = T_a$, $\pi(R_a) = -R_a$, $\pi(T_a) = L_a$

(4) $\nu(L_a) = R_a$, $\nu(R_a) = -T_a$, $\nu(T_a) = -L_a$

証 明 (1) $(L_a u, v) = (au, v) = (u, \bar{a}v) = -(u, av) = -(u, L_a v) \quad u, v\in\mathfrak{C}$ より $L_a\in\mathfrak{D}_4$ である．$R_a\in\mathfrak{D}_4$ も同様であり，T_a に対しては $T_a = L_a + R_a \in\mathfrak{D}_4$ である．

(2)
$$(\kappa(L_a))u = \overline{L_a\bar{u}} = \overline{a\bar{u}} = u\bar{a} = -ua = -R_a u \qquad u\in\mathfrak{C}$$
より $\kappa(L_a) = -R_a$ である．他の式も同様である．

(3) $L_{a+b} = L_a + L_b$, $L_{a\alpha} = L_a\alpha$, $a, b\in\mathfrak{C}$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ (R_a, T_a についても同様) の性質があるから，$a = e_i$, $i = 1, \cdots, 7$ のとき示すと十分である．しかるに $L_{e_i} = 2F_{i0}$, $T_{e_i} = -2G_{0i}$ である．実際，

$$L_{e_i}u = e_i u = 2F_{i0}u$$

$$T_{e_i}u = e_i u + u e_i = \begin{cases} 2e_i & u = 1 \\ -2 & u = e_i \\ 0 & u = e_j, \quad j\neq i, 0 \end{cases}$$

となるからである．さて

$\pi(L_{e_i}) = \pi(2F_{i0}) = -2\pi(F_{0i}) = -2G_{0i}$ (この計算は例5.3の表から容易にわかる) $= T_{e_i}$

$$\pi(T_{e_i}) = \pi(-2G_{0i}) = -2F_{0i} = 2F_{i0} = L_{e_i}$$

$$\pi(R_a) = \pi(T_a - L_a) = L_a - T_a = L_a - (L_a + R_a) = -R_a$$

(4) $\nu = \pi\kappa$ であるから，(4) は (2)(3) の結果である．

命 題 5.15 $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ は $\{L_a \mid a\in\mathfrak{C}, \mathrm{Re}\,a = 0\}$ より (高々1度 Lie 積 [,] を行うことによって) $\boldsymbol{R}$-Lie 環として生成される．すなわち任意の $X\in\mathfrak{D}_4$ は，ある a, b_i, $c_i\in\mathfrak{C}$, $\mathrm{Re}\,a = \mathrm{Re}\,b_i = \mathrm{Re}\,c_i = 0$ を用いて

$$X = L_a + \sum_i [L_{b_i}, L_{c_i}]$$

と表わされる.

証 明　$\mathfrak{D}_4$ において $\{L_a \mid a \in \mathfrak{C},\ \mathrm{Re}\,a = 0\}$ より生成される部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環を $\mathfrak{D}'$ とする. $L_{e_i} = 2F_{i0}$, $[L_{e_i}, L_{e_j}] = 4[F_{i0}, F_{j0}] = -4F_{ij}$ $(i \neq j,\ i, j \neq 0)$ となるから, $\mathfrak{D}'$ は F_{ij}, $i, j = 0, 1, \cdots, 7$, $i \neq j$ を含む. しかるに F_{ij}, $i < j$ は $\mathfrak{D}_4$ の $\boldsymbol{R}$-基である（例 5.3）から $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_4$ となる.

命 題 5.16　$\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)$ において κ, π より生成される部分群 S_3† は, 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ と群同型である: $S_3 \cong \mathfrak{S}_3$. なお κ, π, ν の間には

$$\kappa^2 = 1, \quad \pi^2 = 1, \quad \nu^3 = 1, \quad \nu = \pi\kappa$$

の関係がある.

証 明　$\{L_a \mid a \in \mathfrak{C},\ \mathrm{Re}\,a = 0\}$ が $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ を生成する（命題 5.15）ので, $\kappa^2 = 1$, $\pi^2 = 1$, $\nu^3 = 1$ の関係は L_a に対して示せばよいが, これらをいずれも補題 5.14 (2)(3)(4) が示している. つぎに写像 f: $S_3 \to \mathfrak{S}_3$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \kappa \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \pi \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\nu \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu\pi \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が群同型写像であることが容易に確かめられる.

（2）$\mathfrak{D}_4$ における無限小 3 対原理

命 題 5.17　**（$\mathfrak{D}_4$ における無限小 3 対原理）**　（1）　任意の $X_1 \in \mathfrak{D}_4$ に対し, X_2, $X_3 \in \mathfrak{D}_4$ が存在して

$$(X_1u)v + u(X_2v) = X_3(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

がなりたつ.

（2）（1）の X_2, X_3 は X_1 に対して 1 意に定まり, かつ

$$X_2 = \nu(X_1), \quad X_3 = \pi(X_1)$$

により決定される.

証 明　（1）　　$(au)v + u(va) = a(uv) + (uv)a \qquad u, v \in \mathfrak{C}$

(208 頁 8) において $a \in \mathfrak{C}$ が $\mathrm{Re}\,a = 0$ であるとすると, $L_a, R_a, T_a \in \mathfrak{D}_4$ であって（補題 5.14 (1)）

† $\mathfrak{D}_4$ の内部自己同型群を $\mathrm{In}(\mathfrak{D}_4)$ で表わすとき, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{D}_4)/\mathrm{In}(\mathfrak{D}_4) \cong S_3$ である（[12] 185 頁定理 10.3).

$$(L_a u)v + u(R_a v) = T_a(uv) \tag{i}$$

となる．同様に $b \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Re}\, b = 0$ をとり

$$(L_b u)v + u(R_b v) = T_b(uv) \tag{ii}$$

をつくる．(ii) に T_a を施して（i）を用いると

$$(L_a L_b u)v + (L_b u)(R_a v) + (L_a u)(R_b v) + u(R_a R_b v) = T_a T_b(uv) \tag{iii}$$

を得る．a と b をいれかえて

$$(L_b L_a u)v + (L_a u)(R_b v) + (L_b u)(R_a v) + u(R_b R_a v) = T_b T_a(uv) \tag{iv}$$

をつくり，(iii) から (iv) を引くと

$$([L_a, L_b]u)v + u([R_a, R_b]v) = [T_a, T_b](uv) \tag{v}$$

となる．しかるに $X_1 \in \mathfrak{D}_4$ は

$$X_1 = L_a + \sum[L_b, L_c] \qquad \mathrm{Re}\, a = \mathrm{Re}\, b = \mathrm{Re}\, c = 0$$

と表わされる（命題5.15）ので，（i）（v）の形の式を有限個加えて $X_2 = R_a + \sum[R_b, R_c]$, $X_3 = T_a + \sum[T_b, T_c]$ とおくと

$$(X_1 u)v + u(X_2 v) = X_3(uv) \tag{vi}$$

を得る．

（2） X_2, X_3 が X_1 に対して1意に定まることを示そう．X_2', $X_3' \in \mathfrak{D}_4$ に対しても

$$(X_1 u)v + u(X_2' v) = X_3'(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C} \tag{vii}$$

がなりたつとする．このとき $X_2'' = X_2 - X_2'$, $X_3'' = X_3 - X_3'$ とおき，(vi) − (vii) をつくると

$$u(X_2'' v) = X_3''(uv)$$

となる．$u = 1$ とおくと $X_2'' v = X_3'' v$ となるから，$X_2'' = X_3''(= X$ とおく）である．よって

$$u(Xv) = X(uv) \tag{viii}$$

がなりたつ. $X(1) = a$ とおくと, $2(a, 1) = (a, 1) + (1, a) = (X(1), 1) + (1, X(1)) = 0$ より $\mathrm{Re}\, a = 0$ である．そして (viii) において $v = 1$ とおくと $ua = Xu$ となるので，(viii) をかき直すと

$$u(va) = (uv)a$$

がすべての $u, v \in \mathfrak{C}$ に対してなりたつ．これより $a \in \boldsymbol{R}$ となる（208頁）が，$\mathrm{Re}\, a = 0$ より $a = 0$ である．よって $Xu = ua = 0$ より $X = 0$, $X_2'' = X_3'' = 0$, すなわち $X_2 = X_2'$, $X_3 = X_3'$ となり1意性が証明された．$X_1 \in \mathfrak{D}_4$ を $X_1 = L_a + \sum[L_b, L_c]$, $\mathrm{Re}\, a =$

$\mathrm{Re}\,b=\mathrm{Re}\,c=0$ と表わす（命題5.15）とき，(1) の結果と1意性より $X_2=R_a+\sum[R_b, R_c]$, $X_3=T_a+\sum[T_b, T_c]$ がわかる．これは $X_2=\nu(X_1)$, $X_3=\pi(X_1)$ を示している（補題5.14）．

補題 5.18 $X_1, X_2, X_3\in\mathfrak{D}_4$ に対して

$$(X_1u)v+u(X_2v)=(\kappa(X_3))(uv) \qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつならば

$$(X_2u)v+u(X_3v)=(\kappa(X_1))(uv) \qquad u, v\in\mathfrak{C}$$
$$(X_3u)v+u(X_1v)=(\kappa(X_2))(uv) \qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

もなりたつ．

証明 $X_2\in\mathfrak{D}_4$ に対して，$X_3', X_1'\in\mathfrak{D}_4$ が存在して

$$(X_2u)v+u(X_3'v)=(\kappa(X_1'))(uv)$$

がなりたち，かつ $X_3'=\nu(X_2)$, $\kappa(X_1')=\pi(X_2)$ である（命題5.17(2)）．そして仮定は $X_2=\nu(X_1)$, $\kappa(X_3)=\pi(X_1)$ である（命題5.17(2)）．よって命題5.16の公式を用いると

$$X_3'=\nu(X_2)=\nu(\nu(X_1))=\nu^{-1}(X_1)=\kappa\pi(X_1)=\kappa\kappa(X_3)=X_3$$
$$X_1'=\kappa\pi(X_2)=\nu^{-1}(X_2)=X_1$$

となり第1の式が証明された．他の式も同様である．

注意 208頁8の3つの公式は，互いに補題5.18の関係にある．

(3) G_2 の Lie 環 $\mathfrak{G}_2$

$$(Xu, v)+(u, Xv)=0 \qquad u, v\in\mathfrak{C}_0$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $X: \mathfrak{C}_0\to\mathfrak{C}_0$ 全体の集合 $\mathfrak{B}_3$ は Lie 積 $[X, Y]=XY-YX$ に関して $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\mathfrak{B}_3$ は

$$\mathfrak{B}_3=\{X\in\mathfrak{D}_4\,|\,X(1)=0\}$$

と定義してもよく，$\mathfrak{D}_4$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になっている．さらに $\mathfrak{B}_3$ は

$$\mathfrak{B}_3=\{X\in\mathfrak{D}_4\,|\,\kappa(X)=X\}$$
$$=\{X\in\mathfrak{D}_4\,|\,\nu(X)=\pi(X)\}$$

と定義してもよいことも容易にわかる．

さて目的の $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{G}_2$ を定義しよう．

定義 $$(Xu)v+u(Xv)=X(uv) \qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $X: \mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ 全体の集合を $\mathfrak{G}_2$ で表わし，$\mathfrak{G}_2$ において Lie 積を $[X, Y]=XY-YX$ と定義すると，$\mathfrak{G}_2$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{G}_2$ を G_2 の

Lie 環という.

命題 5.19　$\mathfrak{G}_2$ は $\mathfrak{B}_3$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環である：$\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{B}_3$. したがって当然 $\mathfrak{G}_2$ は $\mathfrak{D}_4$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になるが，さらに

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_2 &= \{X \in \mathfrak{D}_4 \mid \nu(X) = X,\ \pi(X) = X\}\\ &= \{X \in \mathfrak{D}_4 \mid \sigma(X) = X,\ \sigma \in S_3\}\\ &= \{X \in \mathfrak{B}_3 \mid \pi(X) = X\}\end{aligned}$$

がなりたつ.

証明　$X \in \mathfrak{G}_2$ とする. $(Xu)v + u(Xv) = X(uv)$, $u, v \in \mathfrak{C}$ において $u = v = 1$ とおくと，$X(1) + X(1) = X(1)$ より $X(1) = 0$ を得る. つぎに

$$Xu \in \mathfrak{C}_0 \qquad X \in \mathfrak{G}_2,\ u \in \mathfrak{C}$$

を示そう. $i \neq 0$ のとき $(Xe_i)e_i + e_i(Xe_i) = X(e_ie_i) = X(-1) = -X(1) = 0$ より，$\mathrm{Re}(Xe_i) = 0$ がわかる. これと $X(1) = 0$ とあわせると $\mathrm{Re}(Xu) = 0$, すなわち $Xu \in \mathfrak{C}_0$ を得る. さて $u, v \in \mathfrak{C}_0$ ならば

$$\frac{1}{2}(uv + vu) = -\frac{1}{2}(u\bar{v} + v\bar{u}) = -(u, v) \qquad \text{(i)}$$

(208 頁 5) であることに注意して，これに $X \in \mathfrak{G}_2$ を施すと

$$\frac{1}{2}((Xu)v + u(Xv) + (Xv)u + v(Xu)) = -(u, v)X(1) = 0$$

となる. Xu, $Xv \in \mathfrak{C}_0$ であるから，これをかき直すと (i) より

$$(Xu, v) + (u, Xv) = 0 \qquad u, v \in \mathfrak{C}_0$$

を得る. すなわち $X \in \mathfrak{B}_3$ である：$\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{B}_3$. 命題の後半を示そう. 無限小 3 対原理より，$X \in \mathfrak{D}_4$ が $X \in \mathfrak{G}_2$ であるための必要十分条件は $\nu(X) = X$, $\pi(X) = X$ である. また S_3 は ν, π より群として生成されるから，$\nu(X) = X$, $\pi(X) = X$ の条件は $\sigma(X) = X$, $\sigma \in S_3$ と同値である. 最後の式は

$$\{X \in \mathfrak{B}_3 \mid \pi(X) = X\} = \{X \in \mathfrak{D}_4 \mid \nu(X) = \pi(X),\ \pi(X) = X\} = \mathfrak{G}_2$$

である. 以上で命題が証明された.

$\mathfrak{B}_3 = \{X \in \mathfrak{D}_4 \mid \kappa(X) = X\}$ の式は，$\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ には群 $S^0 = \{1, \kappa\}$ が働き，S^0 の作用により不動な元全体が $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{B}_3$ になることを示している：$\mathfrak{B}_3 = {\mathfrak{D}_4}^{S^0}$†（次頁の脚注）(例 1.35). 同様に命題 5.19 は，$\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ に群 S_3 が働いており，S_3 の作用によ

り不動な元全体が $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{G}_2$ になることを示している：$\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}_4{}^{S_3}$† （例 1.35).

$\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{G}_2$ の構造をもっと詳しく知るためにもう少し準備しよう．

補 題 5.20　$\mathfrak{G}_2$ の元はつぎの 7 つの形の元の有限和で表わされる．

$$G_{23}\alpha + G_{45}\beta + G_{67}\gamma, \quad -G_{13}\alpha - G_{46}\beta + G_{57}\gamma$$
$$G_{12}\alpha + G_{47}\beta + G_{56}\gamma, \quad -G_{15}\alpha + G_{26}\beta - G_{37}\gamma \qquad \alpha+\beta+\gamma=0$$
$$G_{14}\alpha - G_{27}\beta - G_{36}\gamma, \quad -G_{17}\alpha - G_{24}\beta + G_{35}\gamma \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}$$
$$G_{16}\alpha + G_{25}\beta + G_{34}\gamma$$

逆にこれらの元はいずれも $\mathfrak{G}_2$ の元である．

証 明　$X \in \mathfrak{G}_2$ とする．X は $\mathfrak{B}_3$ の元であるから $X = \sum_{0<i<j} G_{ij}\alpha_{ij}$, $\alpha_{ij} \in \boldsymbol{R}$ と表わされる．さらに $\pi(X) = X$ の条件（命題 5.19）をかくと

$$\sum_{0<i<j} F_{ij}\alpha_{ij} = \sum_{0<i<j} G_{ij}\alpha_{ij}$$

となる．これを $1 \in \mathfrak{C}$ に施すと

$$\sum_{0<i<j} e_j e_i \alpha_{ij} = 0$$

となる．e_je_i を e_k に直して，上式の $e_1, e_2, \cdots, e_7$ の係数を比較すると，順に

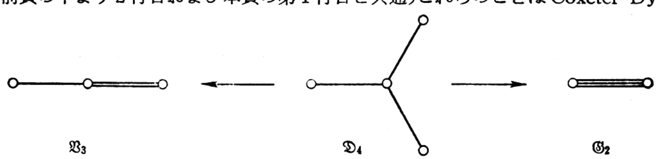
$$\alpha_{23} + \alpha_{45} + \alpha_{67} = 0, \quad -\alpha_{13} - \alpha_{46} + \alpha_{57} = 0$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{47} + \alpha_{56} = 0, \quad -\alpha_{15} + \alpha_{26} - \alpha_{37} = 0$$
$$\alpha_{14} - \alpha_{27} - \alpha_{36} = 0, \quad -\alpha_{17} - \alpha_{24} + \alpha_{35} = 0$$
$$\alpha_{16} + \alpha_{25} + \alpha_{34} = 0$$

となる．これより補題の前半を得る．逆に補題の 7 つの形の元 X が $\mathfrak{G}_2$ に属することは，$X \in \mathfrak{B}_3$ は自明であり，$\pi(X) = X$ も例 5.3 の表より容易に確かめることができるからである．

$\{x \in G_2 \mid x(e_1) = e_1\} \cong SU(3)$ の事実（定理 5.2）に対応してつぎの命題がなりたつ．

命 題 5.21　$\mathfrak{G}_2$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{H}_1 = \{X \in \mathfrak{G}_2 \mid Xe_1 = 0\}$ は $SU(3)$ の Lie 環 $\mathfrak{A}_2 = \{Y \in M(3, \boldsymbol{C}) \mid Y^* = -Y\}$ に $\boldsymbol{R}$-Lie 環同型である：

† （前頁の下より 2 行目および本頁の第 1 行目と共通）これらのことは Coxeter-Dynkin 図形でかくと



$\mathfrak{B}_3$　　　　$\mathfrak{D}_4$　　　　$\mathfrak{G}_2$

のことに対応している．

$$\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{G}_2$$

証　明　$X \in \mathfrak{G}_2$ が $Xe_1 = 0$ をみたすならば $(e_i, Xe_i) = 0$, $Xe_{2i+1} = e_1(Xe_{2i})$, $Xe_6 = (Xe_4)e_2 + e_4(Xe_2)$ がなりたつので　定理5.2と同様な計算を行なうと，X は $\mathfrak{C}_0$ の $\boldsymbol{R}$-基 $e_1, e_2, \cdots, e_7$ に関して

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -c & -d & -e & -f \\ 0 & b & 0 & d & -c & f & -e \\ 0 & c & -d & 0 & -d' & -e' & -f' \\ 0 & d & c & d' & 0 & f' & -e' \\ 0 & e & -f & e' & -f' & 0 & b+d' \\ 0 & f & e & f' & e' & -b-d' & 0 \end{pmatrix}$$

の形をしていることがわかる．この X に対して行列

$$Y = \begin{pmatrix} b\boldsymbol{i} & -c+d\boldsymbol{i} & -e+f\boldsymbol{i} \\ c+d\boldsymbol{i} & d'\boldsymbol{i} & -e'+f'\boldsymbol{i} \\ e+f\boldsymbol{i} & e'+f'\boldsymbol{i} & -(b+d')\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

をつくると $Y \in \mathfrak{A}_2$ である．そして，この対応により $\mathfrak{H}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ が $\boldsymbol{R}$-Lie 環として同型であることも容易に確かめられる．

さて $\mathfrak{G}_2$ の G_2-$\boldsymbol{R}$-加群としての構造について調べよう．$\mathfrak{G}_2$ において $x \in G_2$ の作用を

$$(x \cdot X)(u) = x(X(x^{-1}u)) \qquad X \in \mathfrak{G}_2,\ u \in \mathfrak{C}$$

と定義する．実際 $x \cdot X \in \mathfrak{G}_2$ であることは，$u, v \in \mathfrak{C}$ に対して

$$\begin{aligned}(x \cdot X)(uv) &= x(X(x^{-1}(uv))) = x(X((x^{-1}u)(x^{-1}v))) \\ &= x((X(x^{-1}u))(x^{-1}v) + (x^{-1}u)(X(x^{-1}v))) \\ &= (x(X(x^{-1}u)))(xx^{-1}(v)) + (xx^{-1}(u))(x(X(x^{-1}v))) \\ &= ((x \cdot X)u)v + u((x \cdot X)v)\end{aligned}$$

となるからである．したがって $\mathfrak{G}_2$ は G_2-$\boldsymbol{R}$-加群になる．よって，その複素化 $\mathfrak{G}_2^{\boldsymbol{C}}$ は G_2-$\boldsymbol{C}$-加群である．T を定理5.6に示した G_2 の極大トーラスとし，$\mathfrak{G}_2^{\boldsymbol{C}}$ を T-$\boldsymbol{C}$-加群とみて既約 T-$\boldsymbol{C}$-加群の直和に分解しよう．そのために $\mathfrak{G}_2^{\boldsymbol{C}}$ につぎのように $\boldsymbol{C}$-基をとる（補題5.20参照）．

$$h_1 = (-G_{23} + G_{67}) \otimes 1$$

$$h_2 = (-G_{45} + G_{67}) \otimes 1$$

$$u_{12} = (G_{24} + G_{35}) \otimes 1 - (-G_{25} + G_{34}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_{12} = -(G_{24} + G_{35}) \otimes \boldsymbol{i} + (-G_{25} + G_{34}) \otimes 1$$
$$u_{23} = (G_{46} + G_{57}) \otimes 1 - (-G_{47} + G_{56}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_{23} = -(G_{46} + G_{57}) \otimes \boldsymbol{i} + (-G_{47} + G_{56}) \otimes 1$$
$$u_{13} = (G_{26} + G_{37}) \otimes 1 - (-G_{27} + G_{36}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_{13} = -(G_{26} + G_{37}) \otimes \boldsymbol{i} + (-G_{27} + G_{36}) \otimes 1$$
$$u_1 = (-2G_{13} + G_{46} - G_{57}) \otimes 1 - (2G_{12} - G_{47} - G_{56}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_1 = -(-2G_{13} + G_{46} - G_{57}) \otimes \boldsymbol{i} + (2G_{12} - G_{47} - G_{56}) \otimes 1$$
$$u_2 = (-2G_{15} - G_{26} + G_{37}) \otimes 1 - (2G_{14} + G_{27} + G_{36}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_2 = -(-2G_{15} - G_{26} + G_{37}) \otimes \boldsymbol{i} + (2G_{14} + G_{27} + G_{36}) \otimes 1$$
$$u_3 = (2G_{17} - G_{24} + G_{35}) \otimes 1 - (-2G_{16} + G_{25} + G_{34}) \otimes \boldsymbol{i}$$
$$\hat{u}_3 = -(2G_{17} - G_{24} + G_{35}) \otimes \boldsymbol{i} + (-2G_{16} + G_{25} + G_{34}) \otimes 1$$

このとき $t = t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in T$ に対して

$$\begin{aligned}
t\cdot h_1 &= h_1, & t\cdot h_2 &= h_2 \\
t\cdot u_{12} &= u_{12}e^{i(\theta_1-\theta_2)}, & t\cdot \hat{u}_{12} &= \hat{u}_{12}e^{-i(\theta_1-\theta_2)} \\
t\cdot u_{23} &= u_{23}e^{i(\theta_2-\theta_3)}, & t\cdot \hat{u}_{23} &= \hat{u}_{23}e^{-i(\theta_2-\theta_3)} \\
t\cdot u_{13} &= u_{13}e^{i(\theta_1-\theta_3)}, & t\cdot \hat{u}_{13} &= \hat{u}_{13}e^{-i(\theta_1-\theta_3)} \\
t\cdot u_1 &= u_1e^{i\theta_1}, & t\cdot \hat{u}_1 &= \hat{u}_1e^{-i\theta_1} \\
t\cdot u_2 &= u_2e^{i\theta_2}, & t\cdot \hat{u}_2 &= \hat{u}_2e^{-i\theta_2} \\
t\cdot u_3 &= u_3e^{i\theta_3}, & t\cdot \hat{u}_3 &= \hat{u}_3e^{-i\theta_3}
\end{aligned}$$

がなりたつ. 実際, $h_1, h_2, u_{12}, \hat{u}_{12}, u_{23}, \hat{u}_{23}, u_{13}, \hat{u}_{13}$ は $\mathfrak{A}_2{}^C$ の C-基であり, 補題 4.14 の証明における $h_i, u_{ij}, \hat{u}_{ij}$ と対応している (命題 5.21) ので, $t\cdot h_i = h_i$, $t\cdot u_{ij} = u_{ij}e^{i(\theta_i-\theta_j)}$, $t\cdot \hat{u}_{ij} = \hat{u}_{ij}e^{-i(\theta_i-\theta_j)}$ は補題 4.14 で (計算は補題 4.7) 既に示されている 結果である. (もちろん, つぎに示すような証明をしてもよいが). 残りの 6 つの式を証明するのであるが, ここではこれらの 1 つ, $t\cdot u_1 = u_1e^{i\theta_1}$ を証明しておこう. そのためには $\mathfrak{C}^C = \mathfrak{C} \otimes_R C$ において

$$(t\cdot u_1)(e_i \otimes 1) = (u_1(e_i \otimes 1))e^{i\theta_1} \qquad i = 0, 1, \cdots, 7$$

がなりたつことを示すと十分である. この計算を再びここでは $i = 1$ と $i = 4$ のときだけ証明しておくにとどめる.

$$(t\cdot u_1)(e_1 \otimes 1) = t(u_1(t^{-1}(e_1 \otimes 1))) = t(u_1(e_1 \otimes 1))$$

$$
\begin{aligned}
&= t(((-2G_{13}+G_{46}-G_{57})\otimes 1-(2G_{12}-G_{47}-G_{56})\otimes \boldsymbol{i}))(e_1\otimes 1)\\
&= t(2e_3\otimes 1+2e_2\otimes \boldsymbol{i})\\
&= 2((-e_2\sin\theta_1+e_3\cos\theta_1)\otimes 1+(e_2\cos\theta_1+e_3\sin\theta_1)\otimes \boldsymbol{i})\\
&= 2(-e_2\otimes\sin\theta_1+e_3\otimes\cos\theta_1+e_2\otimes \boldsymbol{i}\cos\theta_1+e_3\otimes \boldsymbol{i}\sin\theta_1)\\
&= 2(e_3\otimes 1+e_2\otimes \boldsymbol{i})(\cos\theta_1+\boldsymbol{i}\sin\theta_1)\\
&= ((-2G_{13}+G_{46}-G_{57})\otimes 1-(2G_{12}-G_{47}-G_{56})\otimes \boldsymbol{i})(e_1\otimes 1))e^{i\theta_1}\\
&= u_1(e_1\otimes 1)e^{i\theta_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(t\cdot u_1)(e_4\otimes 1) &= t(u_1(t^{-1}(e_4\otimes 1)))\\
&= t(u_1(e_4\cos\theta_2-e_5\sin\theta_2)\otimes 1)\\
&= t(((-2G_{13}+G_{46}-G_{57})\otimes 1-(2G_{12}-G_{47}-G_{56})\otimes \boldsymbol{i})((e_4\cos\theta_2-e_5\sin\theta_2)\otimes 1))\\
&= t((-e_6\cos\theta_2-e_7\sin\theta_2)\otimes 1-(e_7\cos\theta_2-e_6\sin\theta_2)\otimes \boldsymbol{i})\\
&= t(-e_6\otimes\cos\theta_2-e_7\otimes\sin\theta_2-e_7\otimes \boldsymbol{i}\cos\theta_2+e_6\otimes \boldsymbol{i}\sin\theta_2)\\
&= t(-e_6\otimes 1-e_7\otimes \boldsymbol{i})(\cos\theta_2-\boldsymbol{i}\sin\theta_2)\\
&= (-(e_6\cos\theta_3+e_7\sin\theta_3)\otimes 1-(-e_6\sin\theta_3+e_7\cos\theta_3)\otimes \boldsymbol{i})e^{-i\theta_2}\\
&= (-e_6\otimes\cos\theta_3-e_7\otimes\sin\theta_3+e_6\otimes \boldsymbol{i}\sin\theta_3-e_7\otimes \boldsymbol{i}\cos\theta_3)e^{-i\theta_2}\\
&= (-e_6\otimes 1-e_7\otimes \boldsymbol{i})(\cos\theta_3-\boldsymbol{i}\sin\theta_3)e^{-i\theta_2}\\
&= ((-2G_{13}+G_{46}-G_{57})\otimes 1-(2G_{12}-G_{47}-G_{56})\otimes \boldsymbol{i})(e_4\otimes 1)e^{-i\theta_3}e^{-i\theta_2}\\
&= u_1(e_4\otimes 1)e^{-i(\theta_2+\theta_3)}\\
&= u_1(e_4\otimes 1)e^{i\theta_1}
\end{aligned}
$$

等である．さて G_2-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{G}_2{}^C$ を $\boldsymbol{R}(T)=\boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, z_2, z_2{}^{-1}, z_3, z_3{}^{-1}]/(z_1z_2z_3-1)$ の元とみるとき

$$
\begin{aligned}
j^*(\mathfrak{G}_2{}^C) &= 2+z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1}+z_1z_2{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2\\
&\qquad +z_2z_3{}^{-1}+z_2{}^{-1}z_3+z_3z_1{}^{-1}+z_3{}^{-1}z_1\\
&= 3+2(z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1})+z_1z_2{}^{-1}+z_1{}^{-1}z_2+z_2z_3{}^{-1}\\
&\qquad +z_2{}^{-1}z_3+z_3z_1{}^{-1}+z_3{}^{-1}z_1-(1+z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1})\\
&= \lambda_2-\lambda_1
\end{aligned}
$$

(命題5.9) となる．$\mathfrak{G}_2$ が G_2-$\boldsymbol{R}$-加群であることにも注意すると，以上よりつぎの定理を得る．

定理 5.22 $R(G_2)=\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ ($RO(G_2)=\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$) において

$$
j^*(\mathfrak{G}_2{}^C)=\lambda_2-\lambda_1 \qquad (j^*(\mathfrak{G}_2)=\lambda_2-\lambda_1)
$$

がなりたつ.

§3. 3対原理とスピノル群 $Spin(7)$, $Spin(8)$

(1) $SO(8)$ における3対原理

補 題 5.23 行列 $A \in SO(n)$ は，ある歪対称行列 $X \in M(n, \boldsymbol{R})$, ${}^tX = -X$ を用いて $A = \exp X$ と表わされる．逆に歪対称行列 $X \in M(n, \boldsymbol{R})$, ${}^tX = -X$ に対して $\exp X \in SO(n)$ となる．ここに $\exp X$ は

$$\exp X = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots$$

とする†.

証 明 まず $\exp\begin{pmatrix} & -\theta \\ \theta & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることに注意しよう．さて $A \in SO(n)$ はある $B \in O(n)$ により

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_m & \\ & & & (1) \end{pmatrix}^{\dagger\dagger} \qquad A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

に変形される（[21] 命題 25 (1)). 行列

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & Y_m & \\ & & & (0) \end{pmatrix}^{\dagger\dagger} \qquad Y_i = \begin{pmatrix} & -\theta_i \\ \theta_i & \end{pmatrix}$$

をつくると，${}^tY = -Y$ であって $\exp Y = B^{-1}AB$ となる．したがって $X = BYB^{-1}$ とおくと ${}^tX = -X$ であり，かつ

$$\exp X = \exp(BYB^{-1}) = B(\exp Y)B^{-1} = B(B^{-1}AB)B^{-1} = A$$

となる．命題の後半は ${}^tX = -X$ ならば

$$\begin{aligned} {}^t(\exp X)(\exp X) &= (\exp {}^tX)(\exp X) = (\exp(-X))(\exp X) = \exp(-X + X) \\ &= \exp 0 = E \end{aligned}$$

となるから $\exp X \in O(n)$ である．つぎに写像 $f: I = [0, 1] \to O(n)$, $f(t) = \exp tX$

† 写像 exp: $M(n, K) \to GL(n, K)$ の性質は [21] 2章§6にある.
†† 記号(1), (0) は，n が奇数のときにはそれぞれ 1, 0 を表わし，n が偶数のときには空とする.

は連続である（[21] 命題 92）から，$f(0)=E$ と $f(1)=\exp X$ は $O(n)$ の同じ弧状連結成分に含まれる．しかるに $SO(n)$ が $O(n)$ の単位元 E を含む弧状連結成分である（[21] 定理 20(2)）から，$\exp X\in SO(n)$ である．

命題 5.24（**$SO(8)$ における 3 対原理**） 任意の $x_1\in SO(8)$ に対し，$x_2, x_3\in SO(8)$ が存在して

$$(x_1u)(x_2v)=x_3(uv)\qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつ．かつ，このような x_2, x_3 は，x_1 に対して x_2, x_3; $-x_2, -x_3$ の 2 通りに限る．

証明　$x_1\in SO(8)$ はある $X_1\in\mathfrak{D}_4$ を用いて $x_1=\exp X_1$ と表わされる（補題 5.23）．この X_1 に対して無限小 3 対原理を用いると，$X_2, X_3\in\mathfrak{D}_4$ が存在して

$$(X_1u)v+u(X_2v)=X_3(uv)\qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつ．この式から

$$\begin{aligned}
E(uv)&=uv\\
X_3(uv)&=(X_1u)v+u(X_2v)\\
X_3{}^2(uv)&=(X_1{}^2u)v+2(X_1u)(X_2v)+u(X_2{}^2v)\\
X_3{}^3(uv)&=(X_1{}^3u)v+3(X_1{}^2u)(X_2v)+3(X_1u)(X_2{}^2v)+u(X_2{}^3v)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_3{}^n(uv)&=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\,j!}(X_1{}^iu)(X_2{}^jv)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

となるので，これらをそれぞれ $\dfrac{1}{n!}$ 倍して加えると

$$\begin{aligned}
(\exp X_3)(uv)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X_3{}^n(uv)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{1}{i!\,j!}(X_1{}^iu)(X_2{}^jv)\\
&=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}X_1{}^iu\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}X_2{}^jv\right)=((\exp X_1)u)((\exp X_2)v)
\end{aligned}$$

となる．（この計算は厳密には $\sum_{n=0}^{\infty}$ を $\sum_{n=0}^{N}$ として計算し，それから $N\to\infty$ とするのが正しいかもしれない）．$x_2=\exp X_2$, $x_3=\exp X_3$ とおくと $x_2, x_3\in SO(8)$ であって（補題 5.23）

$$x_3(uv)=(x_1u)(x_2v)\qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつ．よって命題の前半が証明された．つぎに x_1 に対して，x_3, x_3 が符号を除い

て1意に定まることを示そう．まず $x_1=1$ のとき，すなわち

$$u(x_2v)=x_3(uv) \qquad u,\ v \in \mathfrak{C} \tag{i}$$

のときを考えよう．$u=1$ とおくと $x_2v=x_3v$ となるから，$x_2=x_3(=x$ とおく）である．よって

$$u(xv)=x(uv) \tag{ii}$$

がなりたつ．$x(1)=a$ とおくと，$x\in SO(8)$ であるから $|a|=1$ である．そして (ii) において $v=1$ とおくと $ua=xu$ となるので，(i) をかき直すと

$$u(va)=(uv)a$$

がすべての $u,\ v\in\mathfrak{C}$ に対してなりたつ．これより $a\in \boldsymbol{R}$ となる（208頁）が，$|a|=1$ より $a=\pm 1$ である．よって $xu=ua=\pm u$ となり，$x_2=x_3=1$, $x_2=x_3=-1$ のいずれかであることがわかる．一般の場合を証明する前に

$$(x_1u)(x_2v)=x_3(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C} \tag{iii}$$

がなりたつならば

$$(x_1^{-1}u)(x_2^{-1}v)=x_3^{-1}(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C} \tag{iv}$$

もなりたつことに注意しよう．実際，(iii) を用いると

$$x_3((x_1^{-1}u)(x_2^{-1}v))=(x_1(x_1^{-1}u))(x_2(x_2^{-1}v))=uv=x_3(x_3^{-1}(uv))$$

となるが，x_3 は単射であるから (iv) 式を得る．さて x_1, x_2', $x_3'\in SO(8)$ に対しても

$$(x_1u)(x_2'v)=x_3'(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつとしよう．この両辺に x_3^{-1} を施すと (iv) より

$$u((x_2^{-1}x_2')v)=(x_3^{-1}x_3')(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

となる．よって上述より $x_2^{-1}x_2'=x_3^{-1}x_3'=1$ または $x_2^{-1}x_2'=x_3^{-1}x_3'=-1$，すなわち $x_2'=x_2$, $x_3'=x_3$ または $x_2'=-x_2$, $x_3'=-x_3$ のいずれかになる．以上で命題が証明された．

補 題 5.25　x_1, x_2, $x_3\in O(8)$ に対して

$$(x_1u)(x_2v)=(\kappa x_3)(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつならば

$$(x_2u)(x_3v)=(\kappa x_1)(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

$$(x_3u)(x_1v)=(\kappa x_2)(uv) \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

もなりたつ．ここに κx は $(\kappa x)(u)=\overline{x\overline{u}}$, $u\in\mathfrak{C}$ を意味する．

証 明

$$(x_1u)(x_2v)=\overline{x_3(\overline{uv})}$$

($u, v \neq 0$ としておく）の両辺に左から $\overline{x_1 u}$ を，右から $x_3(\overline{uv})$ を掛けると

$$|u|^2(x_2v)(x_3(\overline{uv})) = \overline{x_1u}|uv|^2$$

すなわち

$$(x_2v)(x_3(\overline{uv})) = \overline{x_1u}|v|^2$$

となる．つぎに u の代りに $\overline{vw}$ とおくと

$$(x_2v)(x_3(\bar{v}vw)) = \overline{x_1(\overline{vw})}|v|^2$$

すなわち

$$(x_2v)(x_3w) = (\kappa x_1)(vw) \qquad v, w \in \mathfrak{C}$$

を得る．他の式も同様である．

注意　Moufang の公式 $(au)(va) = a(uv)a$ (208 頁) に補題 5.25 を適用すると，$\mathfrak{C}$ において公式

$$(ua)(\bar{a}v\bar{a}) = |a|^2(uv)\bar{a}, \quad (\bar{a}u\bar{a})(av) = |a|^2\bar{a}(uv)$$

を得る．

補題 5.26　$x_1, x_2, x_3 \in O(8)$ が

$$(x_1u)(x_2v) = x_3(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたすならば，$x_1, x_2, x_3 \in SO(8)$ となる．

証明　$x_1 \notin SO(8)$ とする．写像 $\gamma: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, $\gamma(u) = \bar{u}$ は $\gamma \in O(8)$, $\det \gamma = -1$ であるから $\gamma x_1^{-1} \in SO(8)$ となる．よって $\gamma x_1^{-1} = y_1$ とおくと，γ は $\gamma = y_1 x_1$, $y_1 \in SO(8)$ と表わされている．この $y_1 \in SO(8)$ に対して 3 対原理を用いると，$y_2, y_3 \in SO(8)$ が存在して

$$(y_1(x_1u))(y_2(x_2v)) = y_3((x_1u)(x_2v)) = y_3(x_3(uv)) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

がなりたつ．$y_2x_2 = z_2$, $y_3x_3 = z_3$ とおくと，上式は

$$\bar{u}(z_2v) = z_3(uv)$$

となる．$u = 1$ とおくと $z_2v = z_3v$ となるから，$z_2 = z_3(=z$ とおく）である．よって

$$\bar{u}(zv) = z(uv) \qquad \text{(i)}$$

がなりたつ．$z(1) = a$ とおくとき，$z \in O(8)$ であるから $|a| = 1$ である．そして (i) において，$v = 1$ とおくと，$\bar{u}a = zu$ となるので，(i) をかき直すと

$$\bar{u}(\bar{v}a) = (\overline{uv})a \qquad \text{(ii)}$$

となる．$v = a$ とおくと $\bar{u}\bar{a}a = \overline{ua}a$, $\overline{au} = \overline{ua}$, すなわち

$$au = ua$$

がすべての $u \in \mathfrak{C}$ に対してなりたつ．これより $a \in \boldsymbol{R}$ となる（208頁）が，$|a| = 1$ より $a = \pm 1$ である．これを（ii）に代入して共役元をとると

$$vu = uv$$

がすべての $u, v \in \mathfrak{C}$ に対してなりたつことになるが，これは矛盾である．よって $x_1 \in SO(8)$ である．x_2, x_3 については，補題5.25といま得た結果を組み合わせるとよい．

（2） スピノル群 $Spin(7)$

元 $x \in SO(7)$ に対して3対原理を用いると，$\tilde{x}, x' \in SO(8)$ が存在して

$$(xu)(\tilde{x}v) = x'(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C} \qquad \text{(i)}$$

がなりたつ．$x \in SO(7)$ は $x(1) = 1$ をみたすので，$u = 1$ とおくと $\tilde{x}v = x'v$ となるから $\tilde{x} = x'$ である．よって（i）をかき直すと

$$(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C} \qquad \text{(ii)}$$

となる．逆に $x, \tilde{x} \in SO(8)$ に対して（ii）がなりたったとする．このとき $u = 1$ とおくと，$(x(1))(\tilde{x}v) = \tilde{x}v$ より $x(1) = 1$，すなわち $x \in SO(7)$ となる．

定 義　ある $x \in SO(7)$ に対して

$$(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたす $SO(8)$ の元 $\tilde{x}$ 全体の集合を $\tilde{B}_3$ とすると，$\tilde{B}_3$ は $SO(8)$ の部分群をつくる．あとで（240頁）$\tilde{B}_3$ がスピノル群 $Spin(7)$（172頁）と位相群として同型であることを示すので，以後 $Spin(7)$ とかくときにはこの $\tilde{B}_3$ をさすものとする．

$\tilde{x} \in Spin(7)$ の定義を与える等式 $(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv)$, $u, v \in \mathfrak{C}$ において，$x = \tilde{x}$ となるときが $x \in G_2$ であるから，$Spin(7)$ は G_2 を部分群として含んでいる：

$$G_2 \subset Spin(7)$$

また $Spin(7)$ は，コンパクト群 $SO(8)$（定理4.31）の閉部分群であるから，コンパクト群である（補題1.56）．

定 理 5.27　等質空間 $Spin(7)/G_2$ は7次元球面 S^7 に同相である：

$$Spin(7)/G_2 \simeq S^7$$

また

$$Spin(7) \cap SO(7) = G_2$$

がなりたつ．

証 明　$S^7 = \{a \in \mathfrak{C} \mid |a| = 1\}$ とおくと S^7 は7次元球面である．$Spin(7)$ は $SO(8)$

の部分群であるから，$Spin(7)$ は S^7 に働く．この働き方が推移的であることを示そう．

$b_0\in S^7$ を与える．

$a_1\in S^7$ を $(1,\ a_1)=0$ をみたす任意の元とする．

$a_2\in S^7$ を $(1,\ a_2)=(a_1,\ a_2)=0$ をみたす任意の元とする．

$a_3\in S^7$ を $a_3b_0=a_1(a_2b_0)$ より定まる $\mathfrak{C}$ の元とする．もっと詳しくいうならば，$a_3=(a_1(a_2b_0))\bar{b}_0$ とおくと a_3 は $a_3\in S^6$ であって，$(1,\ a_3)=(a_1,\ a_3)=(a_2,\ a_3)=0$ をみたしている（証明は下記）．

$a_4\in S^7$ を $(1,\ a_4)=(a_1,\ a_4)=(a_2,\ a_4)=(a_3,\ a_4)=0$ をみたす任意の元とする．

$a_5,\ a_6,\ a_7\in S^7$ をそれぞれ $a_5b_0=a_1(a_4b_0)$, $a_6b_0=a_4(a_2b_0)$, $a_7b_0=a_1(a_6b_0)$ より定まる $\mathfrak{C}$ の元とする．

このとき $a_0=1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基になる．実際，$(a_i,\ a_j)=\delta_{ij}$ を確かめなければならないが，ここではつぎの3つを例として示しておくにとどめる（208頁公式参照）．

$$(a_1,\ a_3)=(a_1b_0,\ a_3b_0)=(a_1b_0,\ a_1(a_2b_0))=(b_0,\ a_2b_0)=(1,\ a_2)=0$$

$$\begin{aligned}(a_2,\ a_5)&=(a_2b_0,\ a_5b_0)=(a_2b_0,\ a_1(a_4b_0))=-(a_1(a_2b_0),\ a_4b_0)\\&=-(a_3b_0,\ a_4b_0)=-(a_3,\ a_4)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1,\ a_6)&=(a_1b_0,\ a_6b_0)=(a_1b_0,\ a_4(a_2b_0))=-(a_1b_0,\ a_2(a_4b_0))\\&=(a_2(a_1b_0),\ a_4b_0)=-(a_1(a_2b_0),\ a_4b_0)=-(a_3b_0,\ a_4b_0)=-(a_3,\ a_4)=0\end{aligned}$$

等である．さて $e_0=1,\ e_1,\ \cdots,\ e_7$; $a_0=1,\ a_1,\ \cdots,\ a_7$ はともに $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基であるから，$\boldsymbol{R}$-同型写像 $x:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}$ を

$$x(e_i)=a_i\qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$$

をみたすように定義すると $x\in O(7)$ となる．さらに，この x は

$$(xu)((xv)b_0)=(x(uv))b_0\qquad u,\ v\in\mathfrak{C}\tag{i}$$

をみたしている．実際，これを示すためには

$$(xe_i)((xe_j)b_0)=(x(e_ie_j))b_0\qquad i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$$

がなりたつことを確かめると十分である．これも数多く確かめなければならないが，ここではつぎの3つを例としてあげておこう（208頁公式参照）．

$$(xe_1)((xe_2)b_0)=a_1(a_2b_0)=a_3b_0=(xe_3)b_0=(x(e_1e_2))b_0$$

$$\begin{aligned}(xe_2)((xe_3)b_0)&=a_2(a_3b_0)=a_2(a_1(a_2b_0))=-a_2(a_2(a_1b_0))=a_1b_0=(xe_1)b_0\\&=(x(e_2e_3))b_0\end{aligned}$$

$$(xe_3)((xe_4)b_0) = a_3(a_4b_0) = -a_4(a_3b_0) = -a_4(a_1(a_2b_0)) = a_1(a_4(a_2b_0))$$
$$= a_1(a_6b_0) = a_7b_0 = (xe_7)b_0 = (x(e_3e_4))b_0$$

等である．さて

$$b_i = a_ib_0 \qquad i = 0, 1, \cdots, 7$$

とおくと $b_0, b_1, \cdots, b_7$ は $\mathfrak{C}$ の正規直交 $\boldsymbol{R}$-基になる．実際，$(b_i, b_j) = (a_ib_0, a_jb_0) = (a_i, a_j) = \delta_{ij}$ となるからである．したがって $\boldsymbol{R}$-同型写像 $\tilde{x}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ を

$$\tilde{x}(e_i) = b_i \qquad i = 0, 1, \cdots, 7$$

をみたすように定義すると $\tilde{x} \in O(8)$ である．そして $\tilde{x}(u) = x(u)b_0$ となるから，(i) は

$$(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C} \qquad \text{(ii)}$$

がなりたつことを示している．$x \in O(7)$, $\tilde{x} \in O(8)$ が上式をみたすので $x \in SO(7)$, $\tilde{x} \in SO(8)$ である（補題5.26）．よって $\tilde{x} \in Spin(7)$ であり，かつ $\tilde{x}(1) = b_0$ である．以上で $Spin(7)$ が S^7 に推移的に働くことが証明された．$1 \in S^7$ における $Spin(7)$ の等方群は G_2 である．実際，$\tilde{x} \in Spin(7)$ が $\tilde{x}(1) = 1$ をみたすとする．このとき (ii) において $v = 1$ とおくと $xu = \tilde{x}u$, すなわち $x = \tilde{x}$ となるので $\tilde{x} \in G_2$ である．逆に $x \in G_2$ は $x(1) = 1$ をみたす $Spin(7)$ の元である．（このことは $Spin(7) \cap SO(7) = G_2$ を示している）．よって，$Spin(7)$ がコンパクト群であることに注意すると，命題1.58より位相同型 $Spin(7)/G_2 \simeq S^7$ を得る．

S^7, G_2 はともに単連結で，それぞれ7, 14次元多様体である（定理5.4）からつぎの定理を得る（定理1.59）．

定理 5.28　$Spin(7)$ は単連結なコンパクト21次元 Lie 群である．

定理 5.29　$x \in SO(7)$, $\tilde{x} \in Spin(7)$ が3対原理

$$(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたす関係にあるとして，写像 $p: Spin(7) \to SO(7)$ を

$$p(\tilde{x}) = x$$

と定義すると，p は連続な全射群準同型写像であって，かつ $\mathrm{Ker}\, p = \{1, -1\}$ となる．したがって，つぎの位相群の同型が存在する．

$$Spin(7)/\{1, -1\} \cong SO(7)$$

証明　$p: Spin(7) \to SO(7)$ が群準同型写像であることは容易に確かめられる．p が全射であり，p の核 $\mathrm{Ker} p$ が 1, −1 であることを3対原理が教えている．つぎに p が連

続写像であることをみよう．補題 5.25 より

$$x(uv) = (\tilde{x}u)((\kappa\tilde{x})v) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

がなりたつ．したがって $\mathfrak{C}$ の $\boldsymbol{R}$-基 $e_0, e_1, \cdots, e_7$ を用いて $\tilde{x}$, x を行列で表示するとき，行列 x の各成分は行列 $\tilde{x}$ の成分の多項式となる．(これらは，たとえば $xe_1 = (\tilde{x}e_2)(\overline{\tilde{x}e_3})$ 等のことからわかる)．よって写像 p は連続である．以上より $Spin(7)$ がコンパクト群であることに注意すると，位相群の同型 $Spin(7)/\{1, -1\} \cong SO(7)$ を得る ([21] 命題 79)．

$Spin(7)/\{1, -1\} \cong SO(7)$ の関係は $(Spin(7), p, SO(7))$ が被覆群である ([21] 命題 162) ことを示している．さらに $Spin(7)$ は単連結である (定理 5.28) から，$(Spin(7), p, SO(7))$ は普遍被覆群である．$SO(7)$ の普遍被覆群は (位相群の同型を除いて) ただ 1 つに限る ([21] 命題 160) ので，この $Spin(7)$ が 172 頁の $Spin(7)$ と位相群として同型になるのである．

注 意　ある $x \in SO(7)$ に対して

$$(\tilde{x}u)(xv) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたす $SO(8)$ の元 $\tilde{x}$ 全体の集合 $Spin'(7)$ は $SO(8)$ の部分群をつくる．この $Spin'(7)$ は $O(8)$ において $Spin(7)$ に共役な群になっている．実際，$f: Spin(7) \to Spin'(7)$

$$f(\tilde{x}) = \kappa\tilde{x} = \gamma\tilde{x}\gamma^{-1} \qquad (\gamma u = \bar{u},\ u \in \mathfrak{C})$$

は群同型写像である．例 5.6, 5.7 ではこの $Spin'(7)$ を単に $Spin(7)$ とかいて定理を述べている．

例 5.4　n 次元球面 $S^n = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 1\}$ において

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \text{ または } \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$$

と定義すると，関係～は同値法則をみたす．この関係による S^n の等化空間 $S^n/\sim$ を $\boldsymbol{R}P_n$ で表わし，n 次元**実射影空間**という．このとき位相同型 $O(n+1)/(O(n) \times O(1)) \simeq \boldsymbol{R}P_n$ がなりたつ ([21] 定理 16) ことがよく知られているが，ここではつぎの位相同型

$$SO(7)/G_2 \simeq \boldsymbol{R}P_7$$

が存在することを示そう．7 次元球面 S^7 を $S^7 = \{a \in \mathfrak{C} \mid |a| = 1\}$ にとり，7 次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P_7 = S^7/\sim$ をつくる．$a \in S^7$ を含む $\boldsymbol{R}P_7$ の類を $[a]$ で表わす．$p: Spin(7) \to SO(7)$ を被覆群準同型写像とし (定理 5.29)，$x \in SO(7)$ に対して $p(\tilde{x}) = x$ となる $\tilde{x} \in Spin(7)$ をとり，$x \in SO(7)$ の $\boldsymbol{R}P_7$ における作用を

$$x[a] = [\tilde{x}a]$$

と定義する．(x に対して，$\tilde{x}$ は $\tilde{x}$ と $-\tilde{x}$ の 2 通りあるが，そのとり方に関係しない)．

$SO(7)$ のこの働き方は推移的である．それは $[a] \in \boldsymbol{R}P_7$, $a \in S^7$ に対し $\tilde{x}(1) = a$ となる $\tilde{x} \in Spin(7)$ をとる（定理 5.27）と，$p(\tilde{x})[1] = [a]$ となるからである．$[1] \in \boldsymbol{R}P_7$ における $SO(7)$ の等方群を求めよう．$x \in SO(7)$ が $x[1] = [\tilde{x}(1)] = [1]$, $\tilde{x} \in Spin(7)$ とすると $\tilde{x}(1) = \pm 1$ となる．$\tilde{x}(1) = 1$ のときには，$x(u)\tilde{x}(v) = \tilde{x}(uv)$ において $v = 1$ とおくとわかるように，$\tilde{x} = x$ となるので $x \in G_2$ である．$\tilde{x}(1) = -1$ のときも $\tilde{x} = -x$ となるので，やはり $x \in G_2$ である．逆に $x \in G_2$ は $x[1] = [1]$ をみたすので，$[1] \in \boldsymbol{R}P_7$ における $SO(7)$ の等方群は G_2 である．よって命題 1.58 より位相同型 $SO(7)/G_2 \simeq \boldsymbol{R}P_7$ を得る．

（3） 再び $R(Spin(7))$, $RO(Spin(7))$ について

しばらく $t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくことにする．さて $SO(7)$ の極大トーラスを

$$T = \left\{ t = t(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t(\theta_1) & & \\ & & t(\theta_2) & \\ & & & t(\theta_3) \end{pmatrix} \middle| \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \boldsymbol{R} \right\}$$

にとる（定理 4.33 (1) 参照）．このとき被覆群準同型写像 $p: Spin(7) \to SO(7)$, $p(\tilde{x}) = x$（定理 5.29）に対して，$\tilde{T} = p^{-1}(T)$ が $Spin(7)$ の極大トーラスであることが証明される（定理 4.44 (1) の証明参照）が，この $\tilde{T}$ をもっと具体的に求めよう．

定 理 5.30

$$\tilde{T} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{t} = \tilde{t}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \\ \theta_i \in \boldsymbol{R} \end{matrix} \begin{pmatrix} t\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\right) & & & \\ & t\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2-\theta_3}{2}\right) & & \\ & & t\left(\dfrac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}\right) & \\ & & & t\left(\dfrac{-\theta_1-\theta_2+\theta_3}{2}\right) \end{pmatrix} \right\}$$

は $Spin(7)$ の極大トーラスである．

証 明 $\boldsymbol{T} = S^1 \times S^1 \times S^1$ を（標準的な）3 次元トーラスとし，写像 $\pi: \boldsymbol{T} \to \tilde{T}$ を

$$\pi(e^{i\theta_1/2}, e^{i\theta_2/2}, e^{i\theta_3/2}) = \tilde{t}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

と定義すると π は連続な全射群準同型写像であって，その核は

$$\operatorname{Ker}\pi = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \mid \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1\}$$

となる．このことから $\tilde{T}$ が3次元トーラスであることがわかる．つぎに $t=t(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\in T$, $\tilde{t}=\tilde{t}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\in\tilde{T}$ に対して

$$(tu)(\tilde{t}v)=\tilde{t}(uv) \qquad u, v\in\mathfrak{C}$$

がなりたつことを示そう．そのためには，

$$(te_i)(\tilde{t}e_j)=\tilde{t}(e_ie_j) \qquad i, j=0, 1, \cdots, 7$$

を示せばよいが，ここでは $8^2=64$ 回のうちの1つ，$i=2$, $j=4$ のときを例としてあげておくにとどめる．

$$\begin{aligned}t(e_2)\tilde{t}(e_4) &= (e_2\cos\theta_1+e_3\sin\theta_1)\left(e_4\cos\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}+e_5\sin\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}\right)\\ &= -e_6\cos\theta_1\cos\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}+e_7\sin\theta_1\cos\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}\\ &\quad +e_7\cos\theta_1\sin\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}+e_6\sin\theta_1\sin\frac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3}{2}\\ &= -e_6\cos\frac{-\theta_1-\theta_2+\theta_3}{2}-e_7\sin\frac{-\theta_1-\theta_2+\theta_3}{2}\\ &= -\tilde{t}(e_6)=\tilde{t}(e_2e_4)\end{aligned}$$

等である．したがって $\tilde{t}\in Spin(7)$, $p(\tilde{t})=t$ であり，$\tilde{T}=p^{-1}(T)$ となる．よって $\tilde{T}$ は $Spin(7)$ の極大トーラスである．

$j: T\to SO(7)$, $\tilde{j}: \tilde{T}\to Spin(7)$ を包含写像とし，$\boldsymbol{j}=\tilde{j}\pi: \boldsymbol{T}\to Spin(7)$ とおく．$R(Spin(7))$ を（$\boldsymbol{j}^*$ を施して）$R(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, z_2{}^{1/2}, z_2{}^{-1/2}, z_3{}^{1/2}, z_3{}^{-1/2}]$ の部分環とみなすことは補題4.49の通りである．さて

$$\mathfrak{C}_0=\{u\in\mathfrak{C}\mid \mathrm{Re}\,u=0\}$$

は $SO(7)$-$\boldsymbol{R}$-加群である．その複素化 $SO(7)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}}$ を考え，これを T-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，$R(T)=\boldsymbol{Z}[z_1, z_1{}^{-1}, z_2, z_2{}^{-1}, z_3, z_3{}^{-1}]$ において

$$j^*(\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}})=1+z_1+z_1{}^{-1}+z_2+z_2{}^{-1}+z_3+z_3{}^{-1}$$

となる（補題4.36と同じ）．したがって $j^*(\Lambda^r(\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}}))$, $r=1, 2, 3$ はそれぞれ命題4.37の $j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^7)^{\boldsymbol{C}}))=\lambda_r$, $r=1, 2, 3$ に対応している．よって定理4.38より

$$R(SO(7))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}}), \Lambda^2(\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}}), \Lambda^3(\mathfrak{C}_0{}^{\boldsymbol{C}})]=\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$$

となる．さらに $\mathfrak{C}_0$ が $SO(7)$-$\boldsymbol{R}$-加群であることに注意すると，定理4.39より

$$RO(SO(7))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{C}_0), \Lambda^2(\mathfrak{C}_0), \Lambda^3(\mathfrak{C}_0)]$$

にもなる．つぎに $Spin(7)$ は $SO(8)$ の部分群であるから，$\mathfrak{C}$ は $Spin(7)$-$\boldsymbol{R}$-加群であ

る．その複素化 $Spin(7)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{S}^C$ を $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，$R(\boldsymbol{T})$ においてつぎの命題のようになる．

命題 5.31 $j^*(\mathfrak{S}^C)=(z_1^{1/2}+z_1^{-1/2})(z_2^{1/2}+z_2^{-1/2})(z_3^{1/2}+z_3^{-1/2})$

証明 $\mathfrak{S}^C$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ．

$$u_i=e_{2i-2}\otimes 1-e_{2i-1}\otimes \boldsymbol{i},\quad \hat{u}_i=-e_{2i-2}\otimes \boldsymbol{i}+e_{2i-1}\otimes 1 \qquad i=1,2,3,4$$

このとき $\tilde{t}=\tilde{t}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in\tilde{T}$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{t}u_1&=u_1e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2}, & \tilde{t}\hat{u}_1&=\hat{u}_1e^{-i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2}\\
\tilde{t}u_2&=u_2e^{i(\theta_1-\theta_2-\theta_3)/2}, & \tilde{t}\hat{u}_2&=\hat{u}_2e^{-i(\theta_1-\theta_2-\theta_3)/2}\\
\tilde{t}u_3&=u_3e^{i(-\theta_1+\theta_2-\theta_3)/2}, & \tilde{t}\hat{u}_3&=\hat{u}_3e^{-i(-\theta_1+\theta_2-\theta_3)/2}\\
\tilde{t}u_4&=u_4e^{i(-\theta_1-\theta_2+\theta_3)/2}, & \tilde{t}\hat{u}_4&=\hat{u}_4e^{-i(-\theta_1-\theta_2+\theta_3)/2}
\end{aligned}$$

がなりたつ．(計算は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{R}^{2n+1})^C$ のとき (166 頁) と同様である)．したがって

$$\begin{aligned}
j^*(\mathfrak{S}^C)&=z_1^{1/2}z_2^{1/2}z_3^{1/2}+z_1^{-1/2}z_2^{-1/2}z_3^{-1/2}+z_1^{1/2}z_2^{-1/2}z_3^{-1/2}+z_1^{-1/2}z_2^{1/2}z_3^{1/2}\\
&\quad+z_1^{-1/2}z_2^{1/2}z_3^{-1/2}+z_1^{1/2}z_2^{-1/2}z_3^{1/2}+z_1^{-1/2}z_2^{-1/2}z_3^{1/2}+z_1^{1/2}z_2^{1/2}z_3^{-1/2}\\
&=(z_1^{1/2}+z_1^{-1/2})(z_2^{1/2}+z_2^{-1/2})(z_3^{1/2}+z_3^{-1/2})
\end{aligned}$$

となる．

この $j^*(\mathfrak{S}^C)$ は命題 4.57 の Δ_7 に対応しているので，定理 4.59 より

$$R(Spin(7))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{S}_0{}^C),\ \Lambda^2(\mathfrak{S}_0{}^C),\ \mathfrak{S}^C]$$

となる．また $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}$ が $Spin(7)$-$\boldsymbol{R}$-加群であることに注意すると，定理 4.60 より

$$RO(Spin(7))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{S}_0),\ \Lambda^2(\mathfrak{S}_0),\ \mathfrak{S}]$$

にもなる．定理 4.59 と記号をあわせるために，$\Lambda^1(\mathfrak{S}_0{}^C)=\lambda_1$, $\Lambda^2(\mathfrak{S}_0{}^C)=\lambda_2$, $\mathfrak{S}^C=\Delta_7$ とおいてつぎの定理を述べておく．したがって異なるものに同じ記号 λ_i が用いられている．

定理 5.32 (1) $k: G_2\to Spin(7)$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

$$k^*: R(Spin(7))=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\lambda_2,\Delta_7]\to R(G_2)=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\lambda_2]$$

は

$$k^*(\lambda_1)=\lambda_1,\quad k^*(\lambda_2)=\lambda_2,\quad k^*(\Delta_7)=1+\lambda_1$$

で与えられる．実表現環 $RO(Spin(7))$, $RO(G_2)$ についても同様なことがなりたつ．

(2) $l: G_2\to SO(7)$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

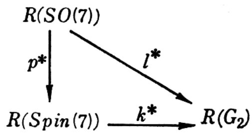
$$l^*: R(SO(7))=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]\to R(G_2)=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\lambda_2]$$

は

$$l^*(\lambda_1) = \lambda_1, \quad l^*(\lambda_2) = \lambda_2, \quad l^*(\lambda_3) = \lambda_1{}^2 + \lambda_1 - \lambda_2$$

で与えられる．実表現環 $RO(SO(7))$, $RO(G_2)$ についても同様なことがなりたつ．

証 明　いずれも明らかであるが，$l^*(\lambda_3)$ の計算をかいておこう．右図において $l^* = k^*p^*$ がなりたち，かつ



$$\varDelta_7{}^2 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

(命題 4.57) であるから

$$\begin{aligned} l^*(\lambda_3) &= k^*p^*(\lambda_3) = k^*(\lambda_3) = k^*(\varDelta_7{}^2 - 1 - \lambda_1 - \lambda_2) = (1 + \lambda_1)^2 - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= \lambda_1{}^2 + \lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned}$$

となる．

(4) スピノル群 *Spin*(8)

定 義　直積位相群 $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ において

$$(x_1u)(x_2v) = (\kappa x_3)(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたす元 (x_1, x_2, x_3) 全体の集合を $\tilde{D}_4$ とおくと，$\tilde{D}_4$ は $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ の部分群をつくる．あとで (246 頁) $\tilde{D}_4$ がスピノル群 $Spin(8)$ (172 頁) と位相群として同型であることを示すので，以後 $Spin(8)$ とかくときにはこの $\tilde{D}_4$ をさすものとする．$Spin(8)$ はコンパクト群 $SO(8) \times SO(8) \times SO(8)$ の閉部分群であるからコンパクト群である (補題 1.56).

$Spin(8)$ において $(x, \tilde{x}, \kappa\tilde{x})$ の形の元を考えよう．これは

$$(xu)(\tilde{x}v) = \tilde{x}(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

をみたすことであるから，$\tilde{x}$ は $Spin(7)$ の元である．$Spin(8)$ において $(x, \tilde{x}, \kappa\tilde{x})$ の形の元全体の集合 $\tilde{B}_3{}'$ は $Spin(8)$ の部分群をつくるが，対応

$$(x, \tilde{x}, \kappa\tilde{x}) \to \tilde{x}$$

により，$\tilde{B}_3{}'$ は $Spin(7)$ と位相群として同型になる．したがって $Spin(7)$ を $\tilde{B}_3{}'$ と同一視して，$Spin(7)$ を $Spin(8)$ の部分群とみなすことにする：

$$Spin(7) \subset Spin(8)$$

注 意　群同型写像 κ, π, ν: $Spin(8) \to Spin(8)$ を

$$\begin{aligned} \kappa(x_1, x_2, x_3) &= (\kappa x_1, \kappa x_3, \kappa x_2) \\ \pi(x_1, x_2, x_3) &= (\kappa x_3, \kappa x_2, \kappa x_1) \\ \nu(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3, x_1) \end{aligned}$$

と定義する (補題 5.25) と，$\kappa^2 = 1$, $\pi^2 = 1$, $\nu^3 = 1$, $\nu = \pi\kappa$ をみたし，$Spin(8)$ の自己同型群において κ, π, ν より生成される部分群 S_3 は 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ に群同型になる (命題

5.16参照). そして

$$\begin{aligned} Spin(7) &= \{x \in Spin(8) \mid \kappa(x) = x\} \\ &= (Spin(8))^{S^0} \ (\text{例}\,1.35) \qquad S^0 = \{1, \kappa\} \\ G_2 &= \{x \in Spin(8) \mid \nu(x) = x,\ \pi(x) = x\} \\ &= \{x \in Spin(8) \mid \sigma(x) = x,\ \sigma \in S_3\} = (Spin(8))^{S_3} \ (\text{例}\,1.35) \\ &= \{x \in Spin(7) \mid \pi(x) = x\} \end{aligned}$$

(命題5.19参照) がなりたっている.

定 理 5.33　等質空間 $Spin(8)/Spin(7)$ は7次元球面 S^7 に同相である.

$$Spin(8)/Spin(7) \simeq S^7$$

証 明　$S^7 = \{a \in \mathfrak{C} \mid |a| = 1\}$ とおくと S^7 は7次元球面である. S^7 において $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8)$ の作用を

$$(x_1, x_2, x_3)a = x_1 a \qquad a \in S^7$$

と定義すると, $SO(8)$ が S^7 に働くことから, $Spin(8)$ は S^7 に働く. この働き方は推移的である. 実際, $a \in S^7$ を与える. $SO(8)$ は S^7 に推移的に働く (160頁) から, $x_1(1) = a$ となる $x_1 \in SO(8)$ がある. この x_1 に対して, 3対原理 $(x_1 u)(x_2 v) = (\kappa x_3)(uv)$, u, $v \in \mathfrak{C}$ をみたす $x_2, x_3 \in SO(8)$ をとると, $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8)$ であって, $(x_1, x_2, x_3)(1) = a$ となる. よって推移的である. $1 \in S^7$ における $Spin(8)$ の等方群を求めよう. $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8)$ が $x_1(1) = 1$ をみたすと, $x_1 \in SO(7)$ となるので $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(7)$ である (237頁). 逆に $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(7)$ ならば $(x_1, x_2, x_3)(1) = 1$ となるので, $1 \in S^7$ における $Spin(8)$ の等方群は $Spin(7)$ である. よって, $Spin(8)$ がコンパクト群であることに注意すると, 命題1.58より位相同型 $Spin(8)/Spin(7) \simeq S^7$ を得る.

S^7, $Spin(7)$ はともに単連結で, それぞれ7, 21次元多様体である (定理5.28) からつぎの定理を得る (命題1.59).

定 理 5.34　$Spin(8)$ は単連結なコンパクト28次元 Lie 群である.

定 理 5.35　写像 $p: Spin(8) \to SO(8)$ を

$$p(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

と定義すると, p は連続な全射群準同型写像であって, かつ $\mathrm{Ker}\,p = \{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ となる. したがって, つぎの位相群の同型が存在する.

$$Spin(8)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(8)$$

証 明　$p: Spin(8) \to SO(8)$ が連続な群準同型写像であることは明らかである. p が

全射であり，p の核 $\mathrm{Ker}\,p$ が $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$ であることを3対原理が教えている．以上より，$Spin(8)$ がコンパクト群であることに注意すると，位相群の同型 $Spin(8)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(8)$ を得る（[21] 命題 79).

$Spin(8)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(8)$ の関係は（$Spin(8)$, p, $SO(8)$）が被覆群である（[21] 命題 162）ことを示している．さらに $Spin(8)$ は単連結である（定理 5.34）から，（$Spin(8)$, p, $SO(8)$）は普遍被覆群である．$SO(8)$ の普遍被覆群は（位相群の同型を除いて）ただ1つに限る（[21] 命題 160）ので，この $Spin(8)$ は 172 頁の $Spin(8)$ と位相群として同型になっている．

例 5.5 等質空間 $SO(8)/Spin(7)$ は7次元実射影空間 $\boldsymbol{RP}_7$ に同相である：

$$SO(8)/Spin(7) \simeq \boldsymbol{RP}_7$$

実際，$\boldsymbol{RP}_7$ を例 5.4 と同じにとる．$x_2 \in SO(8)$ に対して3対原理

$$(x_1u)(x_2v) = x_3(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C} \tag{i}$$

より定まる $x_1 \in SO(8)$ をとり（補題 5.25), $x_2 \in SO(8)$ の $\boldsymbol{RP}_7$ への作用を

$$x_2[a] = [x_1a]$$

と定義する．(x_2 に対して，x_1 は x_1 と $-x_1$ の2通りあるが，そのとり方に関係しない).
$SO(8)$ のこの働き方は推移的である．それは $[a] \in \boldsymbol{RP}_7$, $a \in S^7$ に対し $x_1(1) = a$ となる $x_1 \in SO(8)$ をとり，さらに x_1 に対して（i）をみたす $x_2 \in SO(8)$ をとると $x_2[1] = [a]$ となるからである．$[1] \in \boldsymbol{RP}_7$ における $SO(8)$ の等方群を求めよう．$x_2 \in SO(8)$ が $x_2[1] = [x_1(1)] = [1]$, $x_1 \in SO(8)$ とすると $x_1(1) = \pm 1$ となる．$x_1(1) = 1$ のときには，$x_1 \in SO(7)$ であるから $x_2 \in Spin(7)$ である．$x_1(1) = -1$ のときも $-x_1 \in SO(7)$ となるので，やはり $x_2 \in Spin(7)$ である．逆に $x_2 \in Spin(7)$ は $x_2[1] = [1]$ をみたすので，$[1] \in \boldsymbol{RP}_7$ における $SO(8)$ の等方群は $Spin(7)$ である．よって命題 1.58 より位相同型 $SO(8)/Spin(7) \simeq \boldsymbol{RP}_7$ を得る．

(5) $Spin(8)$ の極大トーラス

$t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくことにし，$SO(8)$ の極大トーラスを定理 4.33 (1) と同様

$$T = \left\{ t_1 = t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} t(\theta_1) & & & \\ & t(\theta_2) & & \\ & & t(\theta_3) & \\ & & & t(\theta_4) \end{pmatrix} \middle| \, \theta_i \in \boldsymbol{R} \right\}$$

にとる．このとき被覆群準同型写像 $p: Spin(8) \to SO(8)$, $p(x_1, x_2, x_3) = x_1$（定理5.35）に対して，$\tilde{T} = p^{-1}(T)$ が $Spin(8)$ の極大トーラスであることが証明される（定理4.44 (1) の証明参照）が，この $\tilde{T}$ を具体的に求めよう．

定理 5.36 $\tilde{T} = \{t = t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), t_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)) \mid \theta_i \in \boldsymbol{R}\}$

$$t_1 = t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} t(\theta_1) & & & \\ & t(\theta_2) & & \\ & & t(\theta_3) & \\ & & & t(\theta_4) \end{pmatrix}$$

$$t_2 = t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} t\left(\dfrac{-\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right) & & & \\ & t\left(\dfrac{-\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right) & & \\ & & t\left(\dfrac{-\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right) & \\ & & & t\left(\dfrac{-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$t_3 = t_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \begin{pmatrix} t\left(\dfrac{-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right) & & & \\ & t\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right) & & \\ & & t\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right) & \\ & & & t\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right) \end{pmatrix}$$

は $Spin(8)$ の極大トーラスである．

証明 $\boldsymbol{T} = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ を（標準的な）4次元トーラスとし，写像 $\pi: \boldsymbol{T} \to \tilde{T}$ を

$$\pi(e^{i\theta_1/2}, e^{i\theta_2/2}, e^{i\theta_3/2}, e^{i\theta_4/2}) = (t_1, t_2, t_3) \qquad (\theta_i \text{ 省略})$$

と定義すると，π は連続な全射群準同型写像であって，その核は

$$\operatorname{Ker}\pi = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \mid \varepsilon_i = \pm 1, \ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1\}$$

となる．このことから $\tilde{T}$ が4次元トーラスであることがわかる．つぎに $t = (t_1, t_2, t_3) \in \tilde{T}$ に対して

$$(t_1 u)(t_2 v) = (\kappa t_3)(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

がなりたつ．（そのためには $(t_1e_i)(t_2e_j)=(\kappa t_3)(e_ie_j)$, $i, j=0, 1, \cdots, 7$ を示せばよいが，その計算は省略する（定理 5.30 の証明参照））．したがって $t\in Spin(8)$, $p(t)=t_1$ であり，$\tilde{T}=p^{-1}(T)$ となる．よって $\tilde{T}$ は $Spin(8)$ の極大トーラスである．

なお $Spin(8)$ について，次節で例外群 F_4 の部分群として再び述べることにする．

§4. 例外群 F_4

(1) Jordan $\boldsymbol{R}$-代数 $\mathfrak{J}$

定義 Cayley 数体 $\mathfrak{C}$ の元を成分にもつ 3 次の Hermite 行列全体の集合を $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(3, \mathfrak{C})$ で表わす：

$$\mathfrak{J}=\{X\in M(3, \mathfrak{C})\mid X^*=X\}$$

$\mathfrak{J}$ に属する行列 X は

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1 & u_3 & \bar{u}_2\\ \bar{u}_3 & \xi_2 & u_1\\ u_2 & \bar{u}_1 & \xi_3\end{pmatrix}\qquad \xi_i\in\boldsymbol{R},\ u_i\in\mathfrak{C}$$

の形をしている．このように行列 $X\in\mathfrak{J}$ の成分を明示したいときには，$X=X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})$ とかくことがある．$\mathfrak{J}$ は行列の和 $X+Y$ および $\alpha\in\boldsymbol{R}$ の作用 $X\alpha$ により 27 次元 $\boldsymbol{R}$-加群になる．

$\mathfrak{J}$ においてつぎの記号を導入しておく．

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix},\qquad E_3=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$F_1{}^u=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & u\\ 0 & \bar{u} & 0\end{pmatrix},\qquad F_2{}^u=\begin{pmatrix}0 & 0 & \bar{u}\\ 0 & 0 & 0\\ u & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad F_3{}^u=\begin{pmatrix}0 & u & 0\\ \bar{u} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

このとき $E_1, E_2, E_3, F_1{}^{e_i}, F_2{}^{e_i}, F_3{}^{e_i}$, $i=0, 1, \cdots, 7$ は $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-基である．

$\mathfrak{J}$ に **Jordan 積** とよばれる積 $X\circ Y$ を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)\qquad X, Y\in\mathfrak{J}$$

と定義する．ここに XY, YX は行列の普通の積である．Jordan 積に関して

(1) $X\circ Y=Y\circ X$

（2） $X\circ(Y+Z)=X\circ Y+X\circ Z$

（3） $(X\alpha)\circ Y=(X\circ Y)\alpha=X\circ(Y\alpha)\qquad \alpha\in \boldsymbol{R}$

がなりたつ†．しかし結合法則 $X\circ(Y\circ Z)=(X\circ Y)\circ Z$ はなりたたないことに注意しよう．E_i, $F_i{}^u$ の Jordan 積はつぎのように与えられている．

$$\begin{cases} E_i\circ E_i=E_i, & E_i\circ E_j=0 \quad i\neq j \\ E_i\circ F_i{}^u=0, & 2E_i\circ F_j{}^u=F_j{}^u \quad i\neq j \\ F_i{}^u\circ F_i{}^v=(E_{i+1}+E_{i+2})(u,v), & 2F_i{}^u\circ F_{i+1}{}^v=F_{i+2}{}^{\overline{uv}} \end{cases}$$

ただし E_i, $F_i{}^u$ の添数 i は mod3 とする．たとえば $E_4=E_1$, $F_5{}^u=F_2{}^u$ 等である．

$\mathfrak{J}$ においてつぎの3つの量，**トレース** $\mathrm{tr}(X)$，**内積** (X, Y) および $\mathrm{tr}(X, Y, Z)$ をそれぞれ

$$\mathrm{tr}(X)=\xi_1+\xi_2+\xi_3 \qquad X=X(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})\in\mathfrak{J}$$

$$\left.\begin{array}{l}(X,Y)=\mathrm{tr}(X\circ Y)\\ \mathrm{tr}(X,Y,Z)=(X\circ Y,Z)\end{array}\right\}\quad X,Y,Z\in\mathfrak{J}$$

と定義する．これらの値はいずれも実数値である．念のために $X=X(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u})$, $Y=Y(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{v})$, $Z=Z(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{w})$ に対して (X, Y), $\mathrm{tr}(X, Y, Z)$ の具体的な値をかいておこう．

$$(X,Y)=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i\eta_i+2(u_i,v_i))$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(X,Y,Z)=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i\eta_i\zeta_i&+\mathrm{Re}(u_iv_{i+1}w_{i+2}+u_iv_{i+2}w_{i+1})+\xi_i((v_{i+1},w_{i+1})\\&+(v_{i+2},w_{i+2}))+\eta_i((w_{i+1},u_{i+1})+(w_{i+2},u_{i+2}))\\&+\zeta_i((u_{i+1},v_{i+1})+(u_{i+2},v_{i+2})))\end{aligned}$$

補 題 5.37 $\mathfrak{J}$ のトレース，内積に関して，つぎの (1)～(5) がなりたつ．

（1） $\mathrm{tr}(X+X')=\mathrm{tr}(X)+\mathrm{tr}(X')$, $\quad\mathrm{tr}(X\alpha)=\mathrm{tr}(X)\alpha\qquad\alpha\in\boldsymbol{R}$

（2） $(X, Y)=(Y, X)$

（3） $(X+X', Y)=(X, Y)+(X', Y)$, $\quad (X\alpha, Y)=(X, Y)\alpha\qquad\alpha\in\boldsymbol{R}$

（4） $(X, E)=\mathrm{tr}(X)$　E は3次の単位行列

（5） 内積 (,) は正則である．すなわち，すべての $Y\in\mathfrak{J}$ に対して $(X, Y)=0$ ならば $X=0$ となる．

† (1)～(3) の性質のほかに，さらに

(4) $((X\circ X)\circ Y)\circ X=(X\circ X)\circ(Y\circ X)$

がなりたち，$\mathfrak{J}$ は Jordan $\boldsymbol{R}$-代数（[21] 247 頁欄外）になる．(4) の証明は，X が実対角線形であるとして示すとよい（命題5.45）ので，自明である．

補題 5.38　$(XY, Z) = (YZ, X) = (ZX, Y) = (X, YZ) = (Y, ZX) = (Z, XY)$　$X, Y, Z \in \mathfrak{J}$ がなりたつ.

証明　$X = \left(x_{ij}\right)$, $Y = \left(y_{ij}\right)$, $Z = \left(z_{ij}\right)$とするとき

$$(XY, Z) = \mathrm{Re}(XY, Z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}((XY)Z + Z(XY)))$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{i,j,k}((x_{ij}y_{jk})z_{ki} + z_{ij}(x_{jk}y_{ki})))$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum_{i,j,k}((y_{jk}z_{ki})x_{ij} + x_{jk}(y_{ki}z_{ij})))\ (207\text{頁})$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathrm{tr}((YZ)X + X(YZ))) = (YZ, X)$$

となる. 他の式も同様である.

補題 5.39　$\mathfrak{J}$ の $\mathrm{tr}(X, Y, Z)$ に関してつぎの (1) ~ (3) がなりたつ.

(1)　$\mathrm{tr}(X, Y, Z) = \mathrm{tr}(Y, Z, X) = \mathrm{tr}(Z, X, Y) = \mathrm{tr}(X, Z, Y) = \mathrm{tr}(Y, X, Z)$
$= \mathrm{tr}(Z, Y, X)$

(2)　$\mathrm{tr}(X + X', Y, Z) = \mathrm{tr}(X, Y, Z) + \mathrm{tr}(X', Y, Z)$
$\mathrm{tr}(X\alpha, Y, Z) = \mathrm{tr}(X, Y, Z)\alpha \qquad \alpha \in \boldsymbol{R}$

(3)　$\mathrm{tr}(X, Y, E) = (X, Y)$

証明

(1)　$\mathrm{tr}(X, Y, Z) = (X \circ Y, Z) = \frac{1}{2}(XY + YX, Z) = \frac{1}{2}((XY, Z) + (YX, Z))$
$= \frac{1}{2}((YZ, X) + (ZY, X))$(補題5.38) $= (Y \circ Z, X) = \mathrm{tr}(Y, Z, X)$

((1) の式は $\mathrm{tr}(X, Y, Z)$ の具体的な形 (249頁) からも明らかである). (2) (3) は自明である.

(2) 例外群 F_4

定義　$\boldsymbol{R}$-同型写像 $x: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ が

$$x(X \circ Y) = xX \circ xY \qquad X, Y \in \mathfrak{J}$$

をみたすとき, x を $\mathfrak{J}$ の**自己同型写像**という. $\mathfrak{J}$ の自己同型写像全体の集合 $Aut(\mathfrak{J})$ は写像の合成の積に関して群をつくる. この群 $Aut(\mathfrak{J})$ を F_4 で表わし, **F_4-型例外 Lie 群**という.

$\boldsymbol{R}$-同型写像 $x: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ のうちで, つぎの 2 つの条件

$$(xX, xY) = (X, Y) \qquad X, Y \in \mathfrak{J}$$

$$\mathrm{tr}(xX,\ xY,\ xZ)=\mathrm{tr}(X,\ Y,\ Z) \qquad X,\ Y,\ Z\in\mathfrak{J}$$

をみたす x 全体の集合を F_4' とおくと，F_4' も群をつくる．

補題 5.40 F_4' は F_4 の部分群である：$F_4'\subset F_4$．($F_4'=F_4$ であることがあと（命題5.47）でわかる)．

証明 $x\in F_4'$ とすると，$X,\ Y\in\mathfrak{J}$ に対して

$$(x(X\circ Y),\ xZ)=(X\circ Y,\ Z)=\mathrm{tr}(X,\ Y,\ Z)=\mathrm{tr}(xX,\ xY,\ xZ)=(xX\circ xY,\ xZ)$$

がすべての $Z\in\mathfrak{J}$ に対してなりたつから，$x(X\circ Y)=xX\circ xY$ となる．よって $x\in F_4$ である．

補題 5.41 $x\in F_4$ ならば $xE=E$ である．

証明 すべての $X\in\mathfrak{J}$ に対して $E\circ X=X$ がなりたつ．これに $x\in F_4$ を施すと $xE\circ xX=xX$ となる．$X=x^{-1}E$ とおくと $xE\circ E=E$，すなわち $xE=E$ となる．

補題 5.42 $x\in F_4'$ は条件

$$\mathrm{tr}(xX)=\mathrm{tr}(X) \qquad X\in\mathfrak{J} \qquad\text{(i)}$$

をみたす．逆に F_4' は（i）の条件をみたす F_4 の部分群である：

$$F_4'=\{x\in F_4\,|\,\mathrm{tr}(xX)=\mathrm{tr}(X),\ X\in\mathfrak{J}\}$$

証明 $x\in F_4'$ ならば $\mathrm{tr}(xX)=(xX,\ E)$(補題5.37(4))$=(xX,\ xE)$(補題5.41)$=(X,\ E)=\mathrm{tr}(X)$ となる．逆に $x\in F_4$ が（i）の条件をみたすならば

$$(xX,\ xY)=\mathrm{tr}(xX\circ xY)=\mathrm{tr}(x(X\circ Y))=\mathrm{tr}(X\circ Y)=(X,\ Y)$$

$$\mathrm{tr}(xX,\ xY,\ xZ)=(xX\circ xY,\ xZ)=(x(X\circ Y),\ xZ)=(X\circ Y,\ Z)=\mathrm{tr}(X,\ Y,\ Z)$$

となる．よって $x\in F_4'$ である．

（3） 対角線形への変形

補題 5.43 F_4' はコンパクト群である．

証明 $\boldsymbol{R}$-同型写像 $x:\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ 全体のつくる群（この群は $GL(27,\ \boldsymbol{R})$ と位相群同型である）のなかで内積

$$(X,\ Y)=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i\eta_i+2(u_i,\ v_i))$$

(249頁）を不変にする元全体のつくる部分群は直交群 $O(27)$ に位相群同型である．さらに F_4' の元は $\mathrm{tr}(X,\ Y,\ Z)$ を不変にする群であるから，F_4' はコンパクト群 $O(27)$ の閉部分群である．よって F_4' はコンパクト群である（補題1.56).

補 題 5.44　$a \in \mathfrak{C}$, $a \neq 0$ に対して写像 $x = x(a)^{\dagger}: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$, $xX = Y$, $X = X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u})$, $Y = Y(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})$ を

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_2 = \dfrac{(a,\ u_1)}{|a|}\sin 2|a| + \dfrac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|a| + \dfrac{\xi_2 + \xi_3}{2} \\ \eta_3 = -\dfrac{(a,\ u_1)}{|a|}\sin 2|a| - \dfrac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|a| + \dfrac{\xi_2 + \xi_3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = u_1 - \dfrac{2a(a,\ u_1)}{|a|^2}\sin^2|a| - \dfrac{a(\xi_2 - \xi_3)}{2\,|a|}\sin 2|a| \\ v_2 = u_2\cos|a| - \dfrac{\bar{a}\bar{u}_3}{|a|}\sin|a| \\ v_3 = u_3\cos|a| + \dfrac{\bar{u}_2\bar{a}}{|a|}\sin|a| \end{cases}$$

と定義すると $x \in F_4{}'$ である.

証 明　$x: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ が $\boldsymbol{R}$-準同型写像であることは明らかである. x が $\boldsymbol{R}$-同型写像であることをいうためには, x が単射であること, すなわち $xX = Y = 0$ ならば $X = 0$ を示すとよい (補題 1.4) が, これはつぎの計算の途中で証明することにする. さて, まず

$$x(X \circ X) = xX \circ xX \qquad X \in \mathfrak{J}$$

がなりたつことを実際の計算によって確かめよう.

$$X \circ X = \begin{pmatrix} \xi_1{}^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 & (\xi_1 + \xi_2)u_3 + \bar{u}_2\bar{u}_1 & * \\ * & \xi_2{}^2 + |u_3|^2 + |u_1|^2 & (\xi_2 + \xi_3)u_1 + \bar{u}_3\bar{u}_2 \\ (\xi_3 + \xi_1)u_2 + \bar{u}_1\bar{u}_3 & * & \xi_3{}^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 \end{pmatrix}$$

$Y \circ Y$ の $(1,\ 1)$-成分 $= \eta_1{}^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$

$$= \xi_1{}^2 + \left| u_2\cos|a| - \frac{\bar{a}\bar{u}_3}{|a|}\sin|a| \right|^2 + \left| u_3\cos|a| + \frac{\bar{u}_2\bar{a}}{|a|}\sin|a| \right|^2$$

$= \cdots((u_2,\ \bar{a}\bar{u}_3) = (u_3,\ \bar{u}_2\bar{a})$ 等を用いる$)\cdots$

$= \xi_1{}^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2$

$= x(X \circ X)$ の $(1,\ 1)$-成分

この結果より, $Y = 0$ とすると, まず $\xi_1 = u_2 = u_3 = 0$ がわかる.

$Y \circ Y$ の $(2,\ 2)$-成分 $= \eta_2{}^2 + |v_3|^2 + |v_1|^2 = \cdots$

† $A_1{}^a$ を 269 頁の行列とするとき $Y = (\exp\tilde{A}_1{}^a)X$ のことである.

$$= \frac{1}{|a|}(a,\ (\xi_2+\xi_3)u_1+\bar{u}_3\bar{u}_2)\sin 2|a| + \frac{1}{2}(\xi_2{}^2-\xi_3{}^2+|u_3|^2-|u_2|^2)\cos 2|a|$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_2{}^2+\xi_3{}^2+2|u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2)$$

$$= x(X\circ X) \text{ の } (2,\ 2)\text{-成分}$$

$Y=0$ とすると，補題の $\eta_2=\eta_3=0$ の形より $\xi_2+\xi_3=0$ がわかるので，$\xi_1=u_2=u_3=0$ も考慮にいれると，上の結果より $\xi_2=\xi_3=u_1=0$ がわかる．以上より $xX=Y=0$ とすると $X=0$ となるので，x が $\boldsymbol{R}$-同型写像であることが示された．

$$Y\circ Y \text{ の } (3,\ 3)\text{-成分} = \cdots = x(X\circ X) \text{ の } (3,\ 3)\text{-成分}$$

の計算は (2, 2)-成分のときと同様である．

$$Y\circ Y \text{ の } (2,\ 3)\text{-成分} = (\eta_2+\eta_3)v_1+\bar{v}_3\bar{v}_2$$

$$= (\xi_2+\xi_3)\Big(u_1-\frac{2a(a,\ u_1)}{|a|^2}\sin^2|a| - \frac{a(\xi_2-\xi_3)}{2|a|}\sin 2|a|\Big)$$

$$+\Big(\bar{u}_3\cos|a|+\frac{au_2}{|a|}\sin|a|\Big)\Big(\bar{u}_2\cos|a|-\frac{u_3a}{|a|}\sin|a|\Big)$$

$$= \cdots(2a(\bar{a},\ u_2u_3)=a(u_2u_3)a+\bar{u}_3\bar{u}_2|a|^2 \text{（208頁 5）を用いる）}\cdots$$

$$= (\xi_2+\xi_3)u_1+\bar{u}_3\bar{u}_2-\frac{2a}{|a|^2}(a,\ (\xi_2+\xi_3)u_1+\bar{u}_3\bar{u}_2)\sin^2|a|$$

$$-\frac{a}{2|a|}(\xi_2{}^2-\xi_3{}^2+|u_3|^2-|u_2|^2)\sin 2|a|$$

$$= x(X\circ X) \text{ の } (2,\ 3)\text{-成分}$$

$$Y\circ Y \text{ の } (3,\ 1)\text{-成分} = (\eta_3+\eta_1)v_2+\bar{v}_1\bar{v}_3$$

$$= \cdots(\bar{a}(u_1u_2)+\bar{u}_1(au_2)=2(a,\ u_1)u_2 \text{（208頁 7）を用いる）}\cdots$$

$$= ((\xi_3+\xi_1)u_2+\bar{u}_1\bar{u}_3)\cos|a| - \frac{\bar{a}}{|a|}((\xi_1+\xi_2)\bar{u}_3+u_1u_2)\sin|a|$$

$$= x(X\circ X) \text{ の } (3,\ 1)\text{-成分}$$

$$Y\circ Y \text{ の } (1,\ 2)\text{-成分} = \cdots = x(X\circ X) \text{ の } (1,\ 2)\text{-成分}$$

の計算は (3, 1)-成分のときと同様である．以上で $x(X\circ X)=xX\circ xX$ が証明された．この式において X の代りに $X+X'$ とおくと，$x(X\circ X')=xX\circ xX'$ となるので $x\in F_4$ である．さらにこの x は

$$\mathrm{tr}(xX)=\eta_1+\eta_2+\eta_3=\xi_1+\xi_2+\xi_3=\mathrm{tr}(X)$$

をみたしているので $x\in F_4{}'$ である（補題5.42）．

以上の準備のもとにつぎの重要な命題を証明しよう（[21] 命題 23 に相当する命題である）.

命 題 5.45† 任意の行列 $X \in \mathfrak{J}$ は，ある $x \in F_4'$ により対角線形

$$xX = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \boldsymbol{R}$$

に変形できる．ここに ξ_1, ξ_2, ξ_3 は順序を除いて（$x \in F_4'$ のとり方に関係せず）X に対し 1 意に定まる．

証 明 $X \in \mathfrak{J}$ を固定して $\mathfrak{X} = \{xX \mid x \in F_4'\}$ とおく．F_4' はコンパクトである（補題 5.43）から，$\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{J}$ のコンパクト集合である．$Y = Y(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v})$ が集合 $\mathfrak{X}$ を動くときの $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$ の最大値 $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ を考えよう．（$\mathfrak{X}$ はコンパクトであるからこの最大値は存在する（補題 1.55））．この最大値を $X_0 = X(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}) \in \mathfrak{X}$ がとるとすると，X_0 は対角線形になっているのである．実際，X_0 が対角線形でないとして，たとえば X_0 の (2, 3)-成分 u_1 が $u_1 \neq 0$ であるとする．このとき $a = a(t) = \dfrac{u_1}{|u_1|}t$, $t \in \boldsymbol{R}$, $t \neq 0$ とおいて補題 5.44 の $x = x(a(t)) \in F_4'$ をつくると，$x(a(t))X_0 = Y(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{v}(t))$ に対して

$$\begin{aligned}
&\eta_1^2(t) + \eta_2^2(t) + \eta_3^2(t) \\
&= \xi_1^2 + \left(\frac{(a(t), u_1)}{|a(t)|}\sin 2|a(t)| + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|a(t)| + \frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{(a(t), u_1)}{|a(t)|}\sin 2|a(t)| - \frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|a(t)| + \frac{\xi_2 + \xi_3}{2}\right)^2 \\
&= \xi_1^2 + \frac{(\xi_2 + \xi_3)^2}{2} + 2\left(\frac{(a(t), u_1)}{|a(t)|}\sin 2|a(t)| + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|a(t)|\right)^2 \\
&= \xi_1^2 + \frac{(\xi_2 + \xi_3)^2}{2} + 2\left(\pm|u_1|\sin 2|t| + \frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\cos 2|t|\right)^2 \\
&\leqq \xi_1^2 + \frac{(\xi_2 + \xi_3)^2}{2} + 2\left(|u_1|^2 + \left(\frac{\xi_2 - \xi_3}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

（この値は最大値であり，$t \neq 0$ のときにその値をとっている）

$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2|u_1|^2$$

となり，$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ が最大値であるという仮定に反する．よって $u_1 = 0$ である．$u_2 = u_3 = 0$ も補題 5.44 と同じような補題をつくって証明するとよい．よって X_0 は対角

† この命題の代数的な別証明が H. Freudenthal: Zur ebenen Oktavengeometrie, Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56, 1953 にある.

線形である．命題の後半を証明しよう．$X \in \mathfrak{J}$ が，ある $x \in F_4'$ により対角線形 $xX = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3 \end{pmatrix}$ に変形されたとする．まず $xX \in \mathfrak{J}$ より $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \boldsymbol{R}$ は明らかである．また，このとき $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(xX) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i$, $(X, X) = (xX, xX) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2$, $\mathrm{tr}(X, X, X) = \mathrm{tr}(xX, xX, xX) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^3$ となる．よって ξ_1, ξ_2, ξ_3 は連立方程式

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \mathrm{tr}(X) \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (X, X) \\ \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = \mathrm{tr}(X, X, X) \end{cases}$$

の解として（順序を除いて）1 意に定まる（[21] 補題 179).

（4） **Cayley 射影平面**

補 題 5.46　$X \in \mathfrak{J}$ に対して，つぎの 5 つの条件は同値である．

（1）　X は既約冪等元である．すなわち $X \neq 0$, $X \circ X = X$ であり，さらにもし $X = X_1 + X_2$, $X_i \circ X_i = X_i$, $X_i \in \mathfrak{J}$, $i = 1, 2$ ならば $X_1 = 0$ または $X_2 = 0$ となる．

（2）　$X \circ X = X$, $\mathrm{tr}(X) = 1$

（3）　$\mathrm{tr}(X) = (X, X) = \mathrm{tr}(X, X, X) = 1$

（4）　$X = xE_i$, $x \in F_4$ $(i = 1, 2, 3)$ と表わされる．

（5）　$X = xE_1$, $x \in F_4$ と表わされる．

証 明　(1)⇒(2)　$X \in \mathfrak{J}$ はある $x \in F_4' \subset F_4$ により

$$xX = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \boldsymbol{R}$$

に変形される（命題 5.45). 条件 $X \circ X = X$ に x を施すと，$xX \circ xX = xX$ となるので

$$\begin{pmatrix} \xi_1^2 & & \\ & \xi_2^2 & \\ & & \xi_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3 \end{pmatrix}$$

である．よって $\xi_i^2 = \xi_i$, すなわち $\xi_i = 1$ または $\xi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ となる．しかるに X は既約であるから

$$\xi_i = 1, \quad \xi_{i+1} = \xi_{i+2} = 0$$

となる．実際，2 個以上の ξ_i が 1 であるとする．たとえば $\xi_1 = \xi_2 = 1$ とすると，$xX =$

E_1+E_2, $X=x^{-1}E_1+x^{-1}E_2$ となり，X が既約であることに反するからである．以上より，ある i に対して $xX=E_i$ となることがわかった．しかるに $x\in F_4'$ であるから $\mathrm{tr}(X)=\mathrm{tr}(xX)=\mathrm{tr}(E_i)=1$ である．

(2)⇒(3)　$(X, X)=\mathrm{tr}(X\circ X)=\mathrm{tr}(X)=1$, $\mathrm{tr}(X,X,X)=(X\circ X,X)=(X,X)=1$

(3)⇒(4)　X を $x\in F_4'$ により対角線形 $xX=\begin{pmatrix}\xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3\end{pmatrix}$ に変形する（命題5.45）とき，条件 $\mathrm{tr}(X)=(X, X)=\mathrm{tr}(X, X, X)=1$ は

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3=1$$

を示している．これを解くと $\xi_i=1$, $\xi_{i+1}=\xi_{i+2}=0$ となるから，X は $xX=E_i$, すなわち $X=x^{-1}E_i$, $x^{-1}\in F_4'\subset F_4$ と表わされる．

(4)⇒(5)　E_1 は F_4 の元 y で E_i に移される：$yE_1=E_i$．たとえば E_1 を E_2 に移すことを考えよう．行列 $Y=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ を用いて，写像 $y\colon\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ を $yX'=YX'Y$, $X'\in\mathfrak{J}$ と定義する．（Y は実行列であるから行列の積 $YX'Y$ に意味がある）．また $Y=Y^{-1}$ であるから $y\in F_4$ となることがわかり，そして $yE_1=E_2$ をみたしている．よって $X=xE_2=(xy)E_1$, $xy\in F_4$ と表わされる．$X=xE_3$ のときも同様である．

(5)⇒(1)　E_1 は既約冪等元である．実際，$E_1\circ E_1=E_1$ は明らかである．つぎに

$$E_1=X_1+X_2,\ X_i\circ X_i=X_i\qquad X_i\in\mathfrak{J},\ i=1, 2$$

としよう．$E_1=X_1+X_2$ を2乗すると $E_1=X_1+2X_1\circ X_2+X_2$ となるので $X_1\circ X_2=0$ がわかる．よって $E_1=X_1+X_2$ に X_1 を掛けると $E_1\circ X_1=X_1$, すなわち

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\xi_1 & u_3 & \bar{u}_2\\ \bar{u}_3 & 0 & 0\\ u_2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & u_3 & \bar{u}_2\\ \bar{u}_3 & \xi_2 & u_1\\ u_2 & \bar{u}_1 & \xi_3\end{pmatrix}=X_1$$

となる．したがって $X_1=\begin{pmatrix}\xi_1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=E_1\xi_1$ である．$E_1=X_1+X_2$ であるから $X_2=E_1(1-\xi_1)$ となる．$X_1\circ X_2=0$ より $\xi_1(1-\xi_1)=0$, すなわち $\xi_1=0$ または $\xi_1=1$ を得る．これは $X_1=0$ または $X_2=0$ を示している．以上で E_1 が既約冪等元であることが証明された．さて $x\in F_4$ は既約および冪等の性質をかえないので，$X=xE_1$ は既約冪等元である．

定 義　補題5.46の5つの条件のうちの1つをみたす $X\in\mathfrak{J}$ 全体の集合を，$\mathfrak{C}P(2)$,

たとえば

$$\mathfrak{C}P(2) = \{X \in \mathfrak{J} \mid X^2 = X,\ \mathrm{tr}(X) = 1\}$$

とおき，$\mathfrak{C}P(2)$ を **Cayley 射影平面**という．$\mathfrak{C}P(2)$ は距離空間 $M(3, \mathfrak{C})$（例1.36参照）の部分空間として位相空間である．$\mathfrak{C}P(2)$ についての性質は [21] にあるので，それを参考にして頂くことにしよう．

命 題 5.47　$F_4' = F_4$ である．すなわち $x \in F_4$ は

$$\mathrm{tr}(xX) = \mathrm{tr}(X) \qquad X \in \mathfrak{J}$$

をみたしている．

証 明　補題5.46 (4)⇒(2) の結果より，$zE_i,\ z \in F_4,\ i = 1, 2, 3$ の形の元に対しては $\mathrm{tr}(zE_i) = 1$ である．さて $x \in F_4,\ X \in \mathfrak{J}$ を与える．X を $y \in F_4'$ により対角線形 $yX = \sum_{i=1}^{3} E_i\xi_i,\ \xi_i \in \boldsymbol{R}$ に変形する（命題5.45)．このとき $xX = (xy^{-1})(yX) = (xy^{-1})(\sum_{i=1}^{3} E_i\xi_i) = \sum_{i=1}^{3} (zE_i)\xi_i,\ z = xy^{-1} \in F_4$ となるから

$$\mathrm{tr}(xX) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{tr}(zE_i)\xi_i = \sum_{i=1}^{3} \xi_i = \mathrm{tr}(yX) = \mathrm{tr}(X)$$

となる．

(5) 再び $Spin(8)$ について

定 義　$$\mathfrak{J}_i = \{F_i{}^u \mid u \in \mathfrak{C}\} \qquad i = 1, 2, 3$$

とおくと $\mathfrak{J}_i$ は $\mathfrak{J}$ の8次元部分 $\boldsymbol{R}$-加群である．この $\mathfrak{J}_i$ は

$$\mathfrak{J}_i = \{X \in \mathfrak{J} \mid 2E_{i+1}\circ X = X,\ 2E_{i+2}\circ X = X\}$$

と定義してもよい．

定 義　F_4 において E_1, E_2, E_3 を不変にする元全体の集合

$$spin(8) = \{x \in F_4 \mid xE_i = E_i,\ i = 1, 2, 3\}$$

は F_4 の部分群をつくる．この $spin(8)$ はつぎの命題5.48が示すように，244頁で定義した $Spin(8)$ と位相群同型となるので，今後は同一視して $spin(8)$ も $Spin(8)$ とかくことにする．

命 題 5.48　$Spin(8)$ と $spin(8)$ は写像

$$(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8) \longrightarrow x \in spin(8)$$

$$x\begin{pmatrix} \xi_1 & u_3 & \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 & \xi_2 & u_1 \\ u_2 & \bar{u}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3u_3 & \overline{x_2u_2} \\ \overline{x_3u_3} & \xi_2 & x_1u_1 \\ x_2u_2 & \overline{x_1u_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

により位相群として同型である.

証 明　$x \in spin(8)$, $X \in \mathfrak{J}_i$ ならば $xX \in \mathfrak{J}_i$ である. 実際, $2E_j \circ X = X$, $j \neq i$ に x を施すと, $2E_j \circ xX = xX$ となるからである. よって $x \in spin(8)$ は $\boldsymbol{R}$-同型写像 x: $\mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_i$ および x_i: $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$

$$xF_i{}^u = F_i{}^{x_iu} \qquad u \in \mathfrak{C}$$

を誘導する ($i = 1, 2, 3$). 関係 $F_i{}^u \circ F_i{}^v = (E_{i+1} + E_{i+2})(u, v)$ に x を施すと $F_i{}^{x_iu} \circ F_i{}^{x_iv} = (E_{i+1} + E_{i+2})(u, v)$ となるが, この左辺は $(E_{i+1} + E_{i+2})(x_iu, x_iv)$ であるから

$$(x_iu, x_iv) = (u, v) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

すなわち $x_i \in O(8)$, $i = 1, 2, 3$ がわかる. さらに $2F_1{}^u \circ F_2{}^u = F_3{}^{\overline{uv}}$ に x を施すと $2F_1{}^{x_1u} \circ F_2{}^{x_2v} = F_3{}^{x_3(\overline{uv})}$ となるが, この左辺は $F_3{}^{\overline{(x_1u)(x_2v)}}$ であるから

$$(x_1u)(x_2v) = \overline{x_3(\overline{uv})} \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

を得る. 補題5.26より $x_1, x_2, x_3 \in SO(8)$ となるので $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8)$ である. 逆に $(x_1, x_2, x_3) \in Spin(8)$ に対して, 命題の写像 x: $\mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ をつくると $x \in spin(8)$ となっている. そして写像 f: $Spin(8) \to spin(8)$ は連続な群同型写像であるが, $Spin(8)$ はコンパクト群であるから f は位相群の同型を与えている.

(6) スピノル群 $Spin(9)$

定 義　F_4 において E_1 を不変にする元全体の集合

$$\tilde{B}_4 = \{x \in F_4 \mid xE_1 = E_1\}$$

は F_4 の部分群をつくる. あとで (262頁) $\tilde{B}_4$ がスピノル群 $Spin(9)$ (172頁) と位相群として同型であることを示すので, 以後 $Spin(9)$ とかくときにはこの $\tilde{B}_4$ をさすものとする.

$Spin(9)$ はコンパクト群 F_4 (補題5.43, 命題5.47) の閉部分群であるからコンパクト群である (補題1.56).

定 義

$$\mathfrak{J}_{01} = \left\{ X = X(\xi, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & u \\ 0 & \bar{u} & -\xi \end{pmatrix} \middle| \xi \in \boldsymbol{R}, u \in \mathfrak{C} \right\}$$

とおくと $\mathfrak{J}_{01}$ は $\mathfrak{J}$ の9次元部分 $\boldsymbol{R}$-加群である. この $\mathfrak{J}_{01}$ は

$$\mathfrak{J}_{01} = \{X \in \mathfrak{J} \mid E_1 \circ X = 0, \ \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

と定義してもよい. $\mathfrak{J}_{01}$ において

$$X\circ X' = (E_2+E_3)(X, X') \qquad X = X(\xi, u),\ X' = X'(\xi', u') \in \mathfrak{J}_{01}$$
$$(X, X') = 2(\xi\xi' + (u, u'))$$

がなりたっている．つぎに

$$\mathfrak{J}_{23} = \left\{ Y = Y(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & v & \bar{u} \\ \bar{v} & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, u, v \in \mathfrak{C} \right\}$$

とおくと $\mathfrak{J}_{23}$ は $\mathfrak{J}$ の 16 次元部分 $\boldsymbol{R}$-加群である．この $\mathfrak{J}_{23}$ は

$$\mathfrak{J}_{23} = \{Y \in \mathfrak{J} \mid 2E_1\circ Y = Y\}$$

と定義してもよい．$\mathfrak{J}_{23}$ においては

$$(Y, Y') = 2((u, u') + (v, v')) \qquad Y = Y(u, v),\ Y' = Y'(u', v') \in \mathfrak{J}_{23}$$

がなりたっている．

つぎの補題は $Spin(9)$ の元を具体的に構成するのにしばしば役立つ．

補 題 5.49　$A \in \mathfrak{J}_{01}$, $(A, A) = 2$ をみたす任意の元 A を与える．

$X_0 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_0, X_0) = 2$, $(A, X_0) = 0$ をみたす任意の元とする．

$Y_0 \in \mathfrak{J}_{23}$ を $(Y_0, Y_0) = 2$, $2A\circ Y_0 = -Y_0$ をみたす任意の元とする．

$$Z_0 = 2X_0\circ Y_0$$

とおく．

$X_1 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_1, X_1) = 2$, $(A, X_1) = (X_0, X_1) = 0$ をみたす任意の元とする．

$X_2 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_2, X_2) = 2$, $(A, X_2) = (X_0, X_2) = (X_1, X_2) = 0$ をみたす任意の元とする．

$$Y_1 = -2Z_0\circ X_1, \quad Z_2 = -2X_2\circ Y_0, \quad X_3 = -2Y_1\circ Z_2$$

とおく．最後に

$X_4 \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(X_4, X_4) = 2$, $(A, X_4) = (X_0, X_4) = (X_1, X_4) = (X_2, X_4) = (X_3, X_4) = 0$ をみたす任意の元とする．

$$Z_4 = -2X_4\circ Y_0, \quad Y_2 = -2Z_0\circ X_2, \quad Y_3 = -2Z_0\circ X_3$$
$$X_5 = -2Y_1\circ Z_4, \quad X_6 = 2Y_2\circ Z_4, \quad X_7 = -2Y_3\circ Z_4$$

とおき，さらに

$$Y_i = -2Z_0\circ X_i \qquad i = 4, 5, 6, 7$$
$$Z_i = -2X_i\circ Y_0 \qquad i = 1, 3, 5, 6, 7$$

とおく．このとき $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $x: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ を

$$xE = E, \quad xE_1 = E_1, \quad x(E_2 - E_3) = A$$

$$xF_1{}^{e_i} = X_i, \quad xF_2{}^{e_i} = Y_i, \quad xF_3{}^{e_i} = Z_i \qquad i = 0, 1, \cdots, 7$$

をみたすように定義すると $x \in F_4$ である．（この x は $xE_1 = E_1$ をみたしているから $x \in Spin(9)$ である）．

この補題 5.49 を証明するためには（補題の内容が妥当であること，および）x が

$$x(X \circ Y) = xX \circ xY \qquad X, Y \in \mathfrak{J}$$

をみたすことを示さなければならない．そのためには $\mathfrak{J}$ の $\boldsymbol{R}$-基に対して示すとよいが，正直にやると $27^2 = 729$ 回確かめねばならない．これはたまらないから，いくらか準備して回数を減らして証明するのであるが，詳しいことは I. Yokota: A Note of $Spin(9)$, Jour. Shinshu. Univ. vol. 3, 1968 をみて頂くことにする．

定 理 5.50 等質空間 $Spin(9)/Spin(8)$ は 8 次元球面 S^8 に同相である：

$$Spin(9)/Spin(8) \simeq S^8$$

証 明 $S^8 = \{X \in \mathfrak{J}_{01} \mid (X, X) = 2\}$ とおくと S^8 は 8 次元球面である．$x \in Spin(9)$, $X \in S^8$ ならば $xX \in S^8$ である．実際，$X \in S^8$ は $E_1 \circ X = 0$, $(X, X) = 2$ であるから，これらに $x \in Spin(9)$ を施すと $E_1 \circ xX = 0$, $(xX, xX) = 2$ となる．よって $xX \in S^8$ である．したがって $Spin(9)$ は S^8 に働く．この働き方は推移的である．実際，$A \in S^8$ を与える．この A に対して補題 5.49 の $x \in Spin(9)$ をつくると $x(E_2 - E_3) = A$ となる．よって推移的である．$E_2 - E_3 \in S^8$ における $Spin(9)$ の等方群を求めよう．$x \in Spin(9)$ が $x(E_2 - E_3) = E_2 - E_3$ であるとする．$x \in Spin(9)$ はつねに $xE_1 = E_1$, $xE = E$（補題 5.41）をみたすので $x(E_2 + E_3) = E_2 + E_3$ となる．これと初めの条件 $x(E_2 - E_3) = E_2 - E_3$ とあわせると $xE_2 = E_2$, $xE_3 = E_3$ となるので，$x \in Spin(8)$ である．逆に $x \in Spin(8)$ は明らかに $x(E_2 - E_3) = E_2 - E_3$ をみたすので，$E_2 - E_3 \in S^8$ における $Spin(9)$ の等方群は $Spin(8)$ である．よって，$Spin(9)$ がコンパクト群であることに注意すると，命題 1.58 より位相同型 $Spin(9)/Spin(8) \simeq S^8$ を得る．

S^8, $Spin(8)$ はともに単連結で，それぞれ 8,28 次元多様体である（定理 5.34）からつぎの定理を得る（命題 1.59）．

定 理 5.51 $Spin(9)$ は単連結なコンパクト 36 次元 Lie 群である．

例 5.6 等質空間 $Spin(9)/Spin(7)$ は 15 次元球面 S^{15} に同相である：

$$Spin(9)/Spin(7) \simeq S^{15}$$

ただし，この $Spin(7)$ は 240 頁の注意の $Spin'(7)$ のことであって

$$Spin(7) = \{\tilde{x} = (\tilde{x}, x, \kappa\tilde{x}) \mid (\tilde{x}u)(xv) = \tilde{x}(uv),\ x \in SO(7),\ u, v \in \mathfrak{C}\}$$

とする．さて $S^{15} = \{Y \in \mathfrak{J}_{23} \mid (Y, Y) = 2\}$ とおくと S^{15} は15次元球面である．$x \in Spin(9)$, $Y \in S^{15}$ ならば $xY \in S^{15}$ であるから，$Spin(9)$ は S^{15} に働く．この働き方は推移的である．実際，$Y_0 \in \mathfrak{J}_{23}$ を与える．$A \in \mathfrak{J}_{01}$ を $(A, A) = 2$, $2A \circ Y_0 = -Y_0$ をみたす任意の元とする．この A, Y_0 をもとにして補題5.49の X_i, Y_i, Z_i を定義して $x \in Spin(9)$ をつくると $xF_2^{e_0} = Y_0$ となる．よって推移的である．$F_2^1 = F_2^{e_0} \in \mathfrak{J}_{23}$ における $Spin(9)$ の等方群を求めよう．$x \in Spin(9)$ が $xF_2^1 = F_2^1$ であるとする．$F_2^1 \circ F_2^1 = E_1 + E_3$ に $x \in Spin(9)$ を施すと $F_2^1 \circ F_2^1 = E_1 + xE_3$ となるので，$xE_3 = E_3$ を得る．しかるに，$x \in Spin(9)$ はつねに $x(E_2 + E_3) = E_2 + E_3$ をみたすので $xE_2 = E_2$ も得る．これでまず $x \in Spin(8)$ がわかった．$x = (x_1, x_2, x_3)$ とおくとき，$F_2^{x_2(1)} = xF_2^1 = F_2^1$ より $x_2(1) = 1$, $x_2 \in SO(7)$ となるから，$x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \in Spin(7)$ である．逆に $x \in Spin(7)$ は $xF_2^1 = F_2^1$ をみたすので，$F_2^1 \in S^{15}$ における $Spin(9)$ の等方群は $Spin(7)$ である．よって命題1.58より位相同型 $Spin(9)/Spin(7) \simeq S^{15}$ を得る．

定理 5.52　$SO(9)$ を $\mathfrak{J}_{01}$ における回転群とする：

$$SO(9) = \{\boldsymbol{R}\text{-同型写像 } x' : \mathfrak{J}_{01} \to \mathfrak{J}_{01} \mid (x'X, x'X) = (X, X),\ \det x' = 1\}$$

$x \in Spin(9)$の $\mathfrak{J}_{01}$ への制限 $x' = x \mid \mathfrak{J}_{01}$ は $x' \in SO(9)$である．さて写像 $p : Spin(9) \to SO(9)$ を

$$p(x) = x' = x \mid \mathfrak{J}_{01}$$

と定義すると p は連続な全射群準同型写像であって，かつ $\mathrm{Ker}\, p = \{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ となる．したがって，つぎの位相群の同型が存在する．

$$Spin(9)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(9)$$

証 明　まず $x \in Spin(9)$ に対して $x' = x \mid \mathfrak{J}_{01} \in SO(9)$ であることを示そう．実際，$x \in Spin(9)$ は $(xX, xX) = (X, X)$, $X \in J_{01}$ をみたすから $x' \in O(9) = O(\mathfrak{J}_{01})$ である．よって写像 $p : Spin(9) \to O(9)$, $p(x) = x'$ が定義できる．この p が連続な群準同型写像であることは明らかである．しかるに $Spin(9)$ は弧状連結である（定理5.51）から，その像 $p(Spin(9))$ は $O(9)$ の弧状連結成分 $SO(9)$（[21] 定理20）に含まれる（[21] 命題59）．よって p は連続な群準同型写像 $p : Spin(9) \to SO(9)$ を定義する．つぎに $p : Spin(9) \to SO(9)$ は全射である．実際，$SO(8) = \{x' \in SO(9) \mid x'(E_2 - E_3) = E_2 - E_3\}$ とおくとき，写像 $p : Spin(9) \to SO(9)$ の $Spin(8) = \{x \in Spin(9) \mid x(E_2 - E_3) = E_2 - E_3\}$ への制限 $p' = p \mid Spin(8) : Spin(8) \to SO(8)$ は，定理5.35の写像 $p : Spin$

$(8) \to SO(8)$ に一致している．特に p': $Spin(8) \to SO(8)$ は全射である．よって補題 1.50 より p: $Spin(9) \to SO(9)$ も全射になる．

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & Spin(8) & \longrightarrow & Spin(9) & \longrightarrow & S^8 & \longrightarrow & * \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| & & \\ e & \longrightarrow & SO(8) & \longrightarrow & SO(9) & \longrightarrow & S^8 & \longrightarrow & * \end{array}$$

最後に p の核を求めよう．$x \in \mathrm{Ker}\, p$, すなわち $x \in Spin(9)$ がすべての $X \in \mathfrak{J}_{01}$ に対して $xX = X$ であるとする．まず $E_2 - E_3 \in \mathfrak{J}_{01}$ であるから $x(E_2 - E_3) = E_2 - E_3$, よって $x \in Spin(8)$ である．$x = (x_1, x_2, x_3)$ とする．$F_1{}^u \in \mathfrak{J}_{01}$ であるから $xF_1{}^u = F_1{}^u$, よって $F_1{}^{x_1 u} = F_1{}^u$, $x_1 u = u$, $u \in \mathfrak{C}$ となるので $x_1 = 1$ である．したがって 3 対原理より $x = (1, 1, 1)$ または $x = (1, -1, -1)$ となり $\mathrm{Ker}\, p = \{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\}$ がわかった．以上より $Spin(9)$ がコンパクト群であることに注意すると，位相群の同型 $Spin(9)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(9)$ を得る（[21] 命題 79)．

$Spin(9)/\{(1, 1, 1), (1, -1, -1)\} \cong SO(9)$ の関係と $Spin(9)$ が単連結である（定理 5.51）ことから，$Spin(9)$ が $SO(9)$ の普遍被覆群になっている．よって，この $Spin(9)$ が 172 頁の $Spin(9)$ に位相群として同型になっているのである（240 頁，246 頁参照)．

例 5.7 $\quad Spin^{(i)}(9) = \{x \in F_4 \mid xE_i = E_i\} \qquad i = 1, 2, 3$

とおくと，いずれも $Spin(9)$ に同型な位相群であって

$$Spin(8) = Spin^{(1)}(9) \cap Spin^{(2)}(9) \cap Spin^{(3)}(9)$$

の関係がなりたっている．

例 5.8 等質空間 $SO(9)/Spin(7)$ は 15 次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P_{15}$ に同相である：

$$SO(9)/Spin(7) \simeq \boldsymbol{R}P_{15}$$

実際，$SO(9)$ を定理 5.52 のようにとる．$Spin(7)$ を $SO(9)$ の部分群とみる方法は（例 5.6 参照）

$$Spin(7) = \{\tilde{x} \in SO(8) \mid (\tilde{x}u)(xv) = \tilde{x}(uv),\ x \in SO(7),\ u, v \in \mathfrak{C}\}$$

とし，$\tilde{x} \in Spin(7)$ の $\mathfrak{J}_{01}$ における作用を

$$\tilde{x}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & u \\ 0 & \bar{u} & -\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \tilde{x}u \\ 0 & \overline{\tilde{x}u} & -\xi \end{pmatrix}$$

と定義して $\tilde{x} \in SO(9)$, $Spin(7) \subset SO(9)$ とみなすのである．さて $S^{15} = \{Y \in \mathfrak{J}_{23} \mid (Y, Y) = 2\}$ において

$$Y \sim Y' \Leftrightarrow Y = Y' \quad \text{または} \quad Y = -Y'$$

の同値関係を与え，この同値関係による等化空間として15次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P_{15}$ をつくる：$S^{15}/\sim = \boldsymbol{R}P_{15}$. $Y \in S^{15}$ を含む類を $[Y]$ で表わす．$p: Spin(9) \to SO(9)$ を被覆群準同型写像とし（定理5.52），$x \in SO(9)$ に対して $p(\tilde{x}) = x$ となる $\tilde{x} \in Spin(9)$ をとり，$x \in SO(9)$ の $\boldsymbol{R}P_{15}$ における作用を

$$x[Y] = [\tilde{x}Y]$$

と定義する．（$x \in SO(9)$ に対して $\tilde{x}$ は $\tilde{x}$ と $\tilde{x}(1, -1, -1)$ の2通りあるが，$Y \in S^{15} \subset \mathfrak{J}_{23}$ に対して $(1, -1, -1)Y = -Y$ となるから上記の定義は $\tilde{x}$ のとり方によらない）．$SO(9)$ のこの働き方は推移的である．それは $[Y] \in \boldsymbol{R}P_{15}$, $Y \in S^{15}$ に対し $\tilde{x}(F_2{}^1) = Y$ となる $\tilde{x} \in Spin(9)$ をとる（例5.6）と，$p(\tilde{x})[F_2{}^1] = [Y]$ となるからである．$F_2{}^1 \in \boldsymbol{R}P_{15}$ における $SO(9)$ の等方群を求めよう．$x \in SO(9)$ が $x[F_2{}^1] = [\tilde{x}F_2{}^1] = [F_2{}^1]$, $\tilde{x} \in Spin(9)$ をみたすと $\tilde{x}F_2{}^1 = \pm F_2{}^1$ となる．このとき例5.6の後半に示したようにして，まず $\tilde{x} \in Spin(8)$ がわかる．$\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とおくとき，$x(F_2{}^1) = F_2{}^1$ のときには $x_2 \in SO(7)$ となるので，$\tilde{x} \in Spin(7)$ である．$x(F_2{}^1) = -F_2{}^1$ のときには $\tilde{x}(1, -1, -1)(F_2{}^1) = F_2{}^1$ より $-x_2 \in SO(7)$ となるので，このときもやはり $\tilde{x} \in Spin(7)$ となる．逆に $\tilde{x} = (\tilde{x}, x, \kappa\tilde{x}) \in Spin(7)$ は $\tilde{x}[F_2{}^1] = [\tilde{x}F_2{}^1] = [F_2{}^{x(1)}] = [F_2{}^1]$ をみたすので，$[F_2{}^1] \in \boldsymbol{R}P_7$ における $SO(9)$ における等方群は $Spin(7)$ である．よって命題1.58より位相同型 $SO(9)/Spin(7) \simeq \boldsymbol{R}P_{15}$ を得る．

（7） F_4 の位相的性質

定理 5.53 等質空間 $F_4/Spin(9)$ は Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P(2)$ に同相である：

$$F_4/Spin(9) \simeq \mathfrak{C}P(2)$$

証明 $X \in \mathfrak{C}P(2)$ は $X \circ X = X$, $\mathrm{tr}(X) = 1$ をみたすから $x \in F_4$ に対して $xX \circ xX = xX$, $\mathrm{tr}(xX) = 1$（命題5.47），すなわち $xX \in \mathfrak{C}P(2)$ となる．よって F_4 は $\mathfrak{C}P(2)$ に働く．$X \in \mathfrak{C}P(2)$ はある $x \in F_4$ を用いて $xE_1 = X$ と表わされる（補題5.46(5)）が，これは F_4 の働き方が推移的であることを示している．$E_1 \in \mathfrak{C}P(2)$ における F_4 の等方群が $Spin(9)$ であることは $Spin(9)$ の定義そのままである．よって，F_4 がコンパクト群である（補題5.43, 命題5.47）ことに注意すると，命題1.58より位相同型 $F_4/Spin(9) \simeq \mathfrak{C}P(2)$ を得る．

$\mathfrak{C}P(2)$, $Spin(9)$ はともに単連結† で，それぞれ16, 36次元多様体† である（定理5.51）

† $\mathfrak{C}P(2)$ が単連結な16次元多様体であることを［21］では証明していないが，多様体であることは Lie 群 F_4 の等質空間であることからわかり，また $\mathfrak{C}P(2)$ が e^0, e^8, e^{16} の胞体をもつ胞複体である（［21］定理29）ことから単連結と16次元であることが導かれる．

からつぎの定理を得る（命題 1.59).

定 理 5.54　F_4 は単連結なコンパクト 52 次元 Lie 群である.

(8) F_4 の極大トーラスと Weyl 群

定 理 5.55　F_4 の階数は 4 である：$\mathrm{rank}\, F_4 = 4$. したがって定理 5.36 に示した $Spin(8)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ は F_4 の極大トーラスである.

証 明　元 $x \in F_4$ をとり固定する. $\mathfrak{C}P(2) \simeq F_4/Spin(9)$ である（定理 5.53）から x は同相写像

$$x: \mathfrak{C}P(2) \to \mathfrak{C}P(2)$$

を誘導する. したがって x はホモロジー群の加群同型写像 $x_{*i}: H_i(\mathfrak{C}P(2)) \to H_i(\mathfrak{C}P(2))$ をひきおこす. しかるに

$$H_0(\mathfrak{C}P(2)) = H_8(\mathfrak{C}P(2)) = H_{16}(\mathfrak{C}P(2)) = \boldsymbol{Z}, \quad H_i(\mathfrak{C}P(2)) = 0, \quad i \neq 0, 8, 16$$

である（[21] 例 175）から, 写像 $x: \mathfrak{C}P(2) \to \mathfrak{C}P(2)$ の Lefschetz 数 $L(x)$ は

$$L(x) = \varepsilon_0 + \varepsilon_8 + \varepsilon_{16} \neq 0 \qquad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 0, 8, 16$$

となり 0 と異なる. したがって写像 $x: \mathfrak{C}P(2) \to \mathfrak{C}P(2)$ は不動点 $X_0 \in \mathfrak{C}P(2)$ をもつ（命題 5.5):

$$xX_0 = X_0$$

この X_0 に対して $yE_1 = X_0$ となる $y \in F_4$ をとる（補題 5.46 (5)）と, $x(yE_1) = yE_1$, $(y^{-1}xy)E_1 = E_1$ となる. したがって

$$y^{-1}xy \in Spin(9)$$

である. しかるに $Spin(9)$ の階数は 4 である（定理 4.44 (1)）から, $Spin(9)$ の 4 次元トーラス $\tilde{T}$ に対して元 $z \in Spin(9)$ をとり, $z^{-1}(y^{-1}xy)z \in \tilde{T}$, すなわち $x \in (yz)\tilde{T}(yz)^{-1}$ にすることができる. よって $F_4 = \bigcup_{y \in F_4} y\tilde{T}y^{-1}$ となり, F_4 の階数が 4 であることが示された.

$Spin(8) \subset Spin(9) \subset F_4$ であり, $Spin(8)$, F_4 の階数はともに 4 であるから $Spin(8)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ は F_4 の（また $Spin(9)$ の）極大トーラスにもなっている.

以後 F_4 の極大トーラス $\tilde{T}$ はつねに定理 5.36 に示した $Spin(8)$ の極大トーラスを用いることにする. F_4 の Weyl 群を求めるためにつぎの補題を準備しておく.

補 題 5.56　$x \in N_{\tilde{T}}(F_4)$ は E_1, E_2, E_3 の置換をひきおこす:

$$xE_1 = E_{i_1}, \quad xE_2 = E_{i_2}, \quad xE_3 = E_{i_3} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$$

証 明 $x \in N_{\tilde{T}}(F_4)$ とする．x は任意の $t=(t_1, t_2, t_3) \in \tilde{T}$ に対して $x^{-1}tx \in \tilde{T} \subset Spin(8)$ となるから，$(x^{-1}tx)E_1 = E_1$，すなわち $t(xE_1) = xE_1$ がなりたつ．$xE_1 = \sum_{i=1}^{3}(E_i\xi_i + F_i^{u_i})$, $\xi_i \in \boldsymbol{R}$, $u_i \in \mathfrak{C}$ とすると

$$\sum_{i=1}^{3}(E_i\xi_i + F_i^{t_iu_i}) = \sum_{i=1}^{3}(E_i\xi_i + F_i^{u_i})$$

となる．よって

$$t_1u_1 = u_1, \quad t_2u_2 = u_2, \quad t_3u_3 = u_3$$

がすべての $t=(t_1, t_2, t_3) \in \tilde{T}$ に対してなりたつ．これらに t_1, t_2, t_3 の具体的な形（定理5.36）を代入すると $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ がわかる．よって $xE_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & \xi_3 \end{pmatrix}$ の形である．しかるに xE_1 は $\mathfrak{J}$ の既約冪等元である（補題5.46）から，ξ_1, ξ_2, ξ_3 の1つが1で他の2つが0となる．したがって xE_1 は E_1, E_2, E_3 のいずれか1つと一致している．同様に xE_2, xE_3 もそれぞれ E_1, E_2, E_3 のいずれか1つである．しかるに xE_1, xE_2, xE_3 は互いに異なるから xE_1, xE_2, xE_3 は E_1, E_2, E_3 の置換になっている．

補題5.56より各元 $\omega \in N_{\tilde{T}}(F_4)/\tilde{T} = W(F_4)$ は E_1, E_2, E_3 の置換をひきおこすことがわかった．よって群準同型写像

$$p: W(F_4) \to \mathfrak{S}_3$$

が定義できる．この p が全射であることを示そう．$\mathfrak{S}_3$ は2つの元

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

より群として生成されるから，p が全射であることをいうには，$p([x(\sigma)]) = \sigma$, $p([y(\tau)]) = \tau$ となる元 $[x(\sigma)], [y(\tau)] \in W(F_4)$ をつくるとよい．さて $\boldsymbol{R}$-同型写像 $x = x(\sigma)$: $\mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ を

$$xE_i = E_{i+1}, \quad xF_i^u = F_{i+1}^u \qquad i = 1, 2, 3$$

をみたすようにつくると，$x \in F_4$ であることが容易に確かめられる．かつ $t = (t_1, t_2, t_3) \in \tilde{T}$ に対して

$$\begin{aligned} x^{-1}txE_i &= x^{-1}tE_{i+1} = x^{-1}E_{i+1} = E_i \\ x^{-1}txF_i^u &= x^{-1}tF_{i+1}^u = x^{-1}F_{i+1}^{t_{i+1}u} = F_i^{t_{i+1}u} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3$$

がなりたつ．これは

$$x^{-1}(t_1, t_2, t_3)x = (t_2, t_3, t_1) \in \tilde{T}$$

を示している（244頁注意の ν 参照）．よって $x \in N_{\tilde{T}}(F_4)$ である．そして $xE_i = E_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$ をみたしているから $p([x(\sigma)]) = \sigma$ となっている．つぎに $y = y(\tau): \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ をつぎの諸式をみたす $\boldsymbol{R}$-同型写像とする．

$$\begin{cases} yE_1 = E_1 & yE_2 = E_3 & yE_3 = E_2 \\ y{F_1}^{e_0} = {F_1}^{e_0} & y{F_2}^{e_0} = {F_3}^{e_0} & y{F_3}^{e_0} = {F_2}^{e_0} \\ y{F_1}^{e_1} = {F_1}^{e_1} & y{F_2}^{e_1} = {F_3}^{e_1} & y{F_3}^{e_1} = {F_2}^{e_1} \\ y{F_1}^{e_2} = {F_1}^{e_2} & y{F_2}^{e_2} = {F_3}^{e_2} & y{F_3}^{e_2} = {F_2}^{e_2} \\ y{F_1}^{e_3} = -{F_1}^{e_3} & y{F_2}^{e_3} = -{F_3}^{e_3} & y{F_3}^{e_3} = -{F_2}^{e_3} \\ y{F_1}^{e_4} = {F_1}^{e_4} & y{F_2}^{e_4} = {F_3}^{e_4} & y{F_3}^{e_4} = {F_2}^{e_4} \\ y{F_1}^{e_5} = -{F_1}^{e_5} & y{F_2}^{e_5} = -{F_3}^{e_5} & y{F_3}^{e_5} = -{F_2}^{e_5} \\ y{F_1}^{e_6} = -{F_1}^{e_6} & y{F_2}^{e_6} = -{F_3}^{e_6} & y{F_3}^{e_6} = -{F_2}^{e_6} \\ y{F_1}^{e_7} = {F_1}^{e_7} & y{F_2}^{e_7} = {F_3}^{e_7} & y{F_3}^{e_7} = {F_2}^{e_7} \end{cases}$$

このとき $y \in F_4$（実は $y \in Spin(9)$）である．実際，この y は補題 5.49 において $A = E_3 - E_2$, $X_0 = {F_1}^{e_0}$, $Y_0 = {F_3}^{e_0}$, $X_1 = {F_1}^{e_1}$, $X_2 = {F_1}^{e_2}$, $X_4 = {F_1}^{e_4}$ としてつくられているからである．さらに $y \in N_{\tilde{T}}(F_4)$ である．実際，定理 5.36 の $t = (t_1, t_2, t_3)$ の形より

$$\begin{aligned} & y^{-1}(t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4), t_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4))y \\ & \quad = (t_1(\theta_1, -\theta_2, -\theta_3, -\theta_4), t_2(\theta_1, -\theta_2, -\theta_3, -\theta_4), t_3(\theta_1, -\theta_2, -\theta_3, -\theta_4)) \end{aligned}$$

となることが簡単な計算により確かめられるからである．そして y は $yE_1 = E_1$, $yE_2 = E_3$, $yE_3 = E_2$ をみたしているので $p([y(\tau)]) = \tau$ である．以上で p が全射であることが証明された．

つぎに $p: W(F_4) \to \mathfrak{S}_3$ の核が $Spin(8)$ の Weyl 群 $W(Spin(8))$ であることを示そう．実際，$[x] \in W(F_4)$, $x \in N_{\tilde{T}}(F_4)$ が $p([x]) = 1$ であるとすると，x は $xE_i = E_i$, $i = 1, 2, 3$ をみたすから $x \in Spin(8)$ である．この x は当然 $x \in N_{\tilde{T}}(Spin(8))$ であるから，$[x] \in N_{\tilde{T}}(Spin(8))/\tilde{T} = W(Spin(8))$ である．逆に $\omega \in W(Spin(8))$ ならば $p(\omega) = 1$ となっている．以上より短完全系列

$$1 \to W(Spin(8)) \xrightarrow{j} W(F_4) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathfrak{S}_3 \to 1$$

を得る．さらにこの系列は分裂している．実際，上記の $x(\sigma)$, $y(\tau)$ はそれぞれ $(x(\sigma))^3 = 1$, $(y(\tau))^2 = 1$ をみたしているので

$$s(\sigma) = [x(\sigma)], \quad s(\tau) = [y(\tau)]$$

をみたす群準同型写像 $s: \mathfrak{S}_3 \to W(F_4)$ が定義できて，この s は $ps=1$ をみたしている．よって補題 1.51(2) よりつぎの定理を得る．

定 理 5.57　F_4 の Weyl 群 $W(F_4)$ は $Spin(8)$ の Weyl 群 $W(Spin(8)) \cong \mathfrak{S}_4^+$（定理 4.44(2)）と 3 次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ の半直積に群同型である（ここで $\mathfrak{S}_3$ は $W(F_4)$ において $[x(\sigma)]$, $y[(\tau)]$ により生成される部分群である）：

$$W(F_4) = W(Spin(8))\mathfrak{S}_3, \qquad W(Spin(8)) \cap \mathfrak{S}_3 = 1$$

とくに $W(F_4)$ は位数 $2^3 \cdot 4! \times 3! = 1152$ の群である．

つぎの補題は F_4 の表現環を求めるときに用いる．

補 題 5.58　$x(\sigma), y(\tau) \in F_4$ は

$$x(\sigma)\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}_{i+1} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$y(\tau)\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_1, \quad y(\tau)\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3, \quad y(\tau)\mathfrak{J}_3 = \mathfrak{J}_2$$

をみたしている．したがって $[x(\sigma)]$, $[y(\tau)]$ より生成される $W(F_4)$ の部分群 $\mathfrak{S}_3$ の各元は $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ の置換をひきおこしている．

証 明　$X \in \mathfrak{J}_i$ は $E_{i+1} \circ X = X$, $E_{i+2} \circ X = X$, $X \in \mathfrak{J}$ をみたすから，これに $x = x(\sigma)$ を施すと $E_{i+2} \circ xX = xX$, $E_i \circ xX = xX$ となる．よって $xX \in \mathfrak{J}_{i+1}$ となる．したがって $x\mathfrak{J}_i \subset \mathfrak{J}_{i+1}$ であり，さらに $x\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}_{i+1}$ である．$y(\tau)$ についても同様である．

（9）F_4 の Lie 環 $\mathfrak{F}_4$

$$\mathfrak{M} = M(3, \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{M}^- = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = -X\}$$

とおく．$\mathfrak{M}$ において内積 (X, Y) を

$$(X, Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY + Y^*X^*) \qquad X, Y \in \mathfrak{M}$$

と定義する．この内積は $\mathfrak{J}$ に定義した内積 (X, Y)（249 頁）の拡張になっている．

補 題 5.59　$(XY, Z) = (YZ, X) = (ZX, Y) = (X, YZ) = (Y, ZX) = (Z, XY)$
$X, Y, Z \in \mathfrak{M}$ がなりたつ．

証 明　(XY, Z) 等の値が実数であることに注意すると，補題 5.38 の証明と全く同じである．

$\mathfrak{M}$ において算法 $[A, X] \in \mathfrak{M}$ を

$$[A, X] = AX - XA \qquad A, X \in \mathfrak{M}$$

と定義する．このとき，つぎの補題がなりたつ．

補 題 5.60　　$[\mathfrak{M}^-, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J} \qquad [\mathfrak{J}, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{M}^-$

証 明　$A \in \mathfrak{M}^-$, $X \in \mathfrak{J}$ ならば $[A, X]^* = (AX - XA)^* = X^*A^* - A^*X^* = X(-A) - (-A)X = AX - XA = [A, X]$ となるから $[A, X] \in \mathfrak{J}$ である．他の式も同様である．

$[\mathfrak{M}^-, \mathfrak{J}] \subset \mathfrak{J}$ であるから，$A \in \mathfrak{M}^-$ に対して写像 $\tilde{A}: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ を

$$\tilde{A}X = [A, X]$$

で定義する．$\tilde{A}: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ は $\boldsymbol{R}$-準同型写像である．

補 題 5.61　$X \in \mathfrak{J}$ に対して，ある $a \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Re}\, a = 0$ が存在して

$$[X, XX] = Ea$$

となる．

証 明　$X = (x_{ij})$, $\bar{x}_{ij} = x_{ji}$, $x_{ij} \in \mathfrak{C}$ とする．$[X, XX] = X(XX) - (XX)X$ の (i, j)-成分 a_{ij} は

$$a_{ij} = \sum_{k,l}(x_{ik}(x_{kl}x_{lj}) - (x_{ik}x_{kl})x_{lj}) \qquad i, j = 1, 2, 3$$

である．x_{ii} は実数であるから，括弧（　）内に x_{ii} が現われるときには，その括弧は 0 である．さて $i \neq j$ のときには，a_{ij} は $a(xa) - (ax)a$, $a(\bar{a}x) - (a\bar{a})x$ 等の和であるから $a_{ij} = 0$ である（208 頁 6）．$i = j$ のときには

$$a_{11} = x_{12}(x_{23}x_{31}) - (x_{12}x_{23})x_{31} + x_{13}(x_{32}x_{21}) - (x_{13}x_{32})x_{21}$$
$$a_{22} = x_{21}(x_{13}x_{32}) - (x_{21}x_{13})x_{32} + x_{23}(x_{31}x_{12}) - (x_{23}x_{31})x_{12}$$
$$a_{33} = x_{31}(x_{12}x_{23}) - (x_{31}x_{12})x_{23} + x_{32}(x_{21}x_{13}) - (x_{32}x_{21})x_{13}$$

であるが，208 頁 8 より $a_{11} = a_{22} = a_{33}$（$= a$ とおく）となる．よって $[X, XX] = Ea$ の形となる．しかるに $X, XX \in \mathfrak{J}$ であるから $[X, XX] \in \mathfrak{M}^-$ である（補題 5.60）．したがって $(Ea)^* = -Ea$, $E\bar{a} = -Ea$, よって $\bar{a} = -a$, すなわち $\mathrm{Re}\, a = 0$ である．

補 題 5.62　(1)　$([A, X], Y) + (X, [A, Y]) = 0 \qquad A, X, Y \in \mathfrak{M}$

がなりたつ．

(2)　$A \in \mathfrak{M}^-$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ならば

$$\mathrm{tr}([A, X], Y, Z) + \mathrm{tr}(X, [A, Y], Z) + \mathrm{tr}(X, Y, [A, Z]) = 0 \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{J}$$

がなりたつ．

証 明　(1)　左辺 $= (AX, Y) - (XA, Y) + (X, AY) - (X, YA) = 0$（補題 5,59）

(2)　$$([A, X], XX) = 0 \qquad X \in \mathfrak{J} \tag{i}$$

がなりたつ．実際，$[X, XX] = Ea$, $a \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Re}\, a = 0$（補題 5,61）とするとき

$$([A, X], XX) = (AX, XX) - (XA, XX) = (A, X(XX)) - (A, (XX)X)\text{(補題5.59)}$$
$$= (A, [X, XX]) = (A, Ea) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Aa + \bar{a}A^*) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Aa + (-a)(-A))$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Aa + aA) = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)a + a\,\mathrm{tr}(A)) = 0$$

となる．さて（i）において X の代りに $X+Y+Z$, $X, Y, Z \in \mathfrak{J}$ とおくと

$$([A, X], YZ+ZY) + ([A, Y], XZ+ZX) + ([A, Z], XY+YX) = 0$$

を得るが，これが求める式である．

定 義　$$\eta(X \circ Y) = \eta X \circ Y + X \circ \eta Y \qquad X, Y \in \mathfrak{J}$$

をみたす $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $\eta: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ 全体の集合を $\mathfrak{F}_4$ で表わし，$\mathfrak{F}_4$ において Lie 積を $[\eta, \zeta] = \eta\zeta - \zeta\eta$ と定義すると，$\mathfrak{F}_4$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．この $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{F}_4$ を **F_4 の Lie 環** という．

$\boldsymbol{R}$-準同型写像 $\eta: \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$ のうちで，つぎの２つの条件

$$(\eta X, Y) + (X, \eta Y) = 0$$
$$\mathrm{tr}(\eta X, Y, Z) + \mathrm{tr}(X, \eta Y, Z) + \mathrm{tr}(X, Y, \eta Z) = 0 \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{J}$$

をみたす η 全体の集合を $\mathfrak{F}_4'$ とおくと $\mathfrak{F}_4'$ も $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる．

補 題 5.63　$\mathfrak{F}_4'$ は $\mathfrak{F}_4$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環である：$\mathfrak{F}_4' \subset \mathfrak{F}_4$,（$\mathfrak{F}_4' = \mathfrak{F}_4$ であることがあと（例5.9）でわかる）．

証 明　$\eta \in \mathfrak{F}_4'$ とすると，$X, Y \in \mathfrak{J}$ に対して

$$(\eta X \circ Y, Z) + (X \circ \eta Y, Z) = \mathrm{tr}(\eta X, Y, Z) + \mathrm{tr}(X, \eta Y, Z)$$
$$= -\mathrm{tr}(X, Y, \eta Z) = -(X \circ Y, \eta Z) = (\eta(X \circ Y), Z)$$

がすべての $Z \in \mathfrak{J}$ に対してなりたつから，$\eta X \circ Y + X \circ \eta Y = \eta(X \circ Y)$ となる．よって $\eta \in \mathfrak{F}_4$ である．

補題5.62, 5.63は，つぎの命題がなりたつことを示している．

命 題 5.64　$A \in \mathfrak{M}^-$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ならば $\tilde{A} \in \mathfrak{F}_4$ である．

$\mathfrak{M}^-$ においてつぎの記号を導入しておく．

$$A_1{}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2{}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3{}^a = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -\bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき $\tilde{A}_i{}^a \in \mathfrak{F}_4$, $a \in \mathfrak{C}$, $i = 1, 2, 3$ であって（命題5.64），$\mathfrak{J}$ への作用は

$$\begin{cases} \tilde{A}_i{}^a E_i = 0, & \tilde{A}_i{}^a F_i{}^u = (E_{i+1} - E_{i+2})2(a, u) \\ \tilde{A}_i{}^a E_{i+1} = -F_i{}^a, & \tilde{A}_i{}^a F_{i+1}{}^u = F_{i+2}{}^{\overline{au}} \\ \tilde{A}_i{}^a E_{i+2} = F_i{}^a, & \tilde{A}_i{}^a F_{i+2}{}^u = -F_{i+2}{}^{\overline{ua}} \end{cases}$$

で与えられている.

最後に $\mathfrak{F}_4$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{D}_4$ について述べておく. (これは $Spin(8) \subset F_4$ に対応することである (命題5.48)).

定 義 $\mathfrak{d}_4 = \{\delta \in \mathfrak{F}_4 \mid \delta E_i = 0,\ i = 1, 2, 3\}$

とおくと $\mathfrak{d}_4$ は $\mathfrak{F}_4$ の部分 $\boldsymbol{R}$-Lie 環になる. この $\mathfrak{d}_4$ はつぎの命題5.65が示すように, $SO(8)$ の Lie 環

$$\mathfrak{D}_4 = \{D \in M(8, \boldsymbol{R}) \mid (Du, v) + (u, Dv) = 0,\ u, v \in \mathfrak{C}\}$$

(221頁) と $\boldsymbol{R}$-Lie 環同型となるので, 今後は同一視して $\mathfrak{d}_4$ も $\mathfrak{D}_4$ とかくことにする.

命 題 5.65 $\mathfrak{D}_4$ と $\mathfrak{d}_4$ は写像

$$D_1 \in \mathfrak{D}_4 \longrightarrow \delta \in \mathfrak{d}_4$$

$$\delta \begin{pmatrix} \xi_1 & u_3 & \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 & \xi_2 & \bar{u}_1 \\ u_2 & \bar{u}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_3u_3 & \overline{D_2u_2} \\ \overline{D_3u_3} & 0 & D_1u_1 \\ D_2u_2 & \overline{D_1u_1} & 0 \end{pmatrix}$$

により $\boldsymbol{R}$-Lie 環として同型である. ここに D_2, D_3 は D_1 に対して無限小3対原理

$$(D_1u)v + u(D_2v) = (\kappa D_3)(uv) \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

より定まる $\mathfrak{D}_4$ の元である.

証 明 $\delta \in \mathfrak{d}_4$, $X \in \mathfrak{J}_i$ ならば $\delta X \in \mathfrak{J}_i$ である. 実際, $2E_j \circ X = X$, $j \neq i$ に δ を施すと, $2E_j \circ \delta X = \delta X$ となるからである. よって $\delta \in \mathfrak{d}_4$ は $\boldsymbol{R}$-準同型写像 $\delta: \mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_i$ および $D_i: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$

$$\delta F_i{}^u = F_i{}^{D_iu} \qquad u \in \mathfrak{C}$$

を誘導する ($i = 1, 2, 3$). $F_i{}^u \circ F_i{}^v = (E_{i+1} + E_{i+2})(u, v)$ に δ を施すと $\delta F_i{}^u \circ F_i{}^v + F_i{}^u \circ \delta F_i{}^v = 0$, $F_i{}^{D_iu} \circ F_i{}^v + F_i{}^u \circ F_i{}^{D_iv} = 0$, $(E_{i+1} + E_{i+2})(D_iu, v) + (E_{i+1} + E_{i+2})(u, D_iv) = 0$ となるから

$$(D_iu, v) + (u, D_iv) = 0 \qquad u, v \in \mathfrak{C}$$

すなわち $D_i \in \mathfrak{D}_4$, $i = 1, 2, 3$ がわかる. さらに $2F_1{}^u \circ F_2{}^v = F_3{}^{\overline{uv}}$ に δ を施すと $2\delta F_1{}^u \circ F_2{}^v + 2F_1{}^u \circ \delta F_2{}^v = \delta F_3{}^{\overline{uv}}$, $2F_1{}^{D_1u} \circ F_2{}^v + 2F_1{}^u \circ F_2{}^{D_2v} = F_3{}^{D_3(\overline{uv})}$, $F_3{}^{\overline{(D_1u)v}} + F_3{}^{\overline{u(D_2v)}} = F_3{}^{D_3(\overline{uv})}$ となるから

$$(D_1u)v+u(D_2v)=\overline{D_3(\overline{uv})} \qquad u,\ v\in\mathfrak{C}$$

を得る．逆に，この (D_1, D_2, D_3) に対して命題の写像 $\delta: \mathfrak{J}\to\mathfrak{J}$ をつくると $\delta\in\mathfrak{d}_4$ となっている．そして写像 $f: \mathfrak{D}_4\to\mathfrak{d}_4$, $f(D_1)=\delta$ は $\boldsymbol{R}$-Lie 環の同型を与えている．

例 5.9 $\boldsymbol{R}$-Lie 環 $\mathfrak{F}_4$ の任意の元 η は

$$\eta=D+\tilde{A} \qquad D\in\mathfrak{D}_4,\ A\in\mathfrak{M}^-,\ \mathrm{diag}\,A=0^{\dagger}$$

と1意に表わされる．実際，$E_i\circ E_i=E_i$, $E_i\circ E_j=0$, $i\neq j$ に η を施すと $2E_i\circ\eta E_i=\eta E_i$, $\eta E_i\circ E_j+E_i\circ\eta E_j=0$ となる．これらのことから

$$\eta E_1=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & \bar{a}_2\\ -\bar{a}_3 & 0 & 0\\ a_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \eta E_2=\begin{pmatrix}0 & a_3 & 0\\ \bar{a}_3 & 0 & -a_1\\ 0 & -\bar{a}_1 & 0\end{pmatrix},\ \eta E_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\bar{a}_2\\ 0 & 0 & a_1\\ -a_2 & \bar{a}_1 & 0\end{pmatrix}\quad a_i\in\mathfrak{C}$$

の形であることがわかる．この a_i を用いて行列 $A=\begin{pmatrix}0 & a_3 & -\bar{a}_2\\ -\bar{a}_3 & 0 & a_1\\ a_2 & -\bar{a}_1 & 0\end{pmatrix}$ をつくると $A\in\mathfrak{M}^-$, $\mathrm{diag}\,A=0$ であって，かつ

$$\tilde{A}E_i=\eta E_i \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

をみたしている．さて $D=\eta-\tilde{A}$ とおくと $DE_i=0$, $i=1, 2, 3$ となるから $D\in\mathfrak{D}_4$ である（命題5.65）．よって $\eta=D+\tilde{A}$, $D\in\mathfrak{D}_4$, $A\in\mathfrak{M}^-$, $\mathrm{diag}\,A=0$ と表わされた．1意性をいうには

$$D+\tilde{A}=0,\ D\in\mathfrak{D}_4,\ A\in\mathfrak{M}^-,\ \mathrm{diag}\,A=0 \text{ ならば } D=0,\ A=0$$

を示すとよい．そのためには $A\in\mathfrak{M}^-$, $\mathrm{diag}\,A=0$ が $\tilde{A}E_i=E_i$, $i=1, 2, 3$ をみたせば $A=0$ となることを示すとよいが，それは容易なことである．以上で証明された．この分解より $\mathfrak{F}_4$ が $28+24=52$ 次元 $\boldsymbol{R}$-Lie 環であることもわかる．また，この分解を用いると

$$\eta\in\mathfrak{F}_4 \text{ ならば } \mathrm{tr}(\eta X)=0 \qquad X\in\mathfrak{J}$$

が導かれる．実際，$\eta=D+\tilde{A}$, $D\in\mathfrak{D}_4$, $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}^-$, $\mathrm{diag}\,A=0$ とおくとき，tr$(DX)=0$ は明らかであり（命題5.65），また $X=(x_{ij})$ として

$$\mathrm{tr}(\tilde{A}X)=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}[A,\ X]))=\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(AX-XA))=\mathrm{Re}(\sum_{i,k}a_{ik}x_{ki}-\sum_{i,k}x_{ik}a_{ki})=0$$

となるからである．さらに，このことから

† $\mathrm{diag}\,A=0$ とは，行列 A の対角線の成分 a_{ii} がすべて0となっていることである．269頁の $A_i{}^a$ は $\mathrm{diag}\,A_i{}^a=0$ をみたしている．

$$\mathfrak{F}_4' = \mathfrak{F}_4$$

がわかる．実際，$\mathfrak{F}_4' \subset \mathfrak{F}_4$ は既に示した（補題 5.63）．逆に $\eta \in \mathfrak{F}_4$ とすると，$X, Y \in \mathfrak{J}$ に対して

$$(\eta X,\ Y) + (X,\ \eta Y) = \mathrm{tr}(\eta X \circ Y) + \mathrm{tr}(X \circ \eta Y) = \mathrm{tr}(\eta(X \circ Y)) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\eta X,\ Y,\ Z) &+ \mathrm{tr}(X,\ \eta Y,\ Z) + \mathrm{tr}(X,\ Y,\ \eta Z)\\ &= (\eta X \circ Y,\ Z) + (X \circ \eta Y,\ Z) + (X \circ Y,\ \eta Z)\\ &= (\eta(X \circ Y),\ Z) - (\eta(X \circ Y),\ Z) = 0\end{aligned}$$

となる．よって $\eta \in \mathfrak{F}_4'$ である．

(10)　再び $R(Spin(8))$, $RO(Spin(8))$ について

$\tilde{T}$ を定理 5.36 に示した $Spin(8)$ の極大トーラスとし，$\tilde{j}: \tilde{T} \to Spin(8)$ を包含写像とする．また $\boldsymbol{T}$, π を定理 5.36 の証明における記号とし，$\boldsymbol{j} = \tilde{j}\pi:\ \boldsymbol{T} \to Spin(8)$ とおく．さて，$\boldsymbol{R}$-加群

$$\mathfrak{J}_i = \{X \in \mathfrak{J} \mid 2E_j \circ X = X,\ j \neq i\} \qquad i = 1, 2, 3$$

は，$x \in Spin(8)$, $X \in \mathfrak{J}_i$ ならば $xX \in \mathfrak{J}_i$ となるので $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群である．その複素化 $Spin(8)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{J}_i{}^C$ を $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, z_2{}^{1/2}, z_2{}^{-1/2}, z_3{}^{1/2}, z_3{}^{-1/2}, z_4{}^{1/2}, z_4{}^{-1/2}]$ においてつぎの命題のようになる．

命 題 5.66

$$\boldsymbol{j}^*(\mathfrak{J}_1{}^C) = \sum_{i=1}^{4} (z_i + z_i{}^{-1})$$

$$\boldsymbol{j}^*(\mathfrak{J}_2{}^C) = \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = -1} z_1{}^{\varepsilon_1/2} z_2{}^{\varepsilon_2/2} z_3{}^{\varepsilon_3/2} z_4{}^{\varepsilon_4/2}$$

$$\boldsymbol{j}^*(\mathfrak{J}_3{}^C) = \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1} z_1{}^{\varepsilon_1/2} z_2{}^{\varepsilon_2/2} z_3{}^{\varepsilon_3/2} z_4{}^{\varepsilon_4/2}$$

$$\boldsymbol{j}^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_1{}^C)) = \boldsymbol{j}^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_2{}^C)) = \boldsymbol{j}^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_3{}^C)) = 4 + \sum_{i \neq j} z_i{}^{\varepsilon_i} z_j{}^{\varepsilon_j}$$

証 明　各 $\mathfrak{J}_i{}^C$ に $\boldsymbol{C}$-基をつぎのように選ぶ．

$$\mathfrak{J}_1{}^C:\quad X_i = F_1{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - F_1{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i},\ \hat{X}_i = -F_1{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + F_1{}^{e_{2i-1}} \otimes 1$$

$$\mathfrak{J}_2{}^C:\quad Y_i = F_2{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - F_2{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i},\ \hat{Y}_i = -F_2{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + F_2{}^{e_{2i-1}} \otimes 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathfrak{J}_3{}^C:\quad Z_i = F_3{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - F_3{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i},\ \hat{Z}_i = -F_3{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + F_3{}^{e_{2i-1}} \otimes 1$$

このとき $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\theta}) = (t_1(\boldsymbol{\theta}),\ t_2(\boldsymbol{\theta}),\ t_3(\boldsymbol{\theta})) \in \tilde{T}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4)$ に対して

$$tX_i = X_i e^{i\theta_i}, \qquad t\hat{X}_i = \hat{X}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{cases} tY_1 = Y_1 e^{i(-\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Y}_1 = \hat{Y}_1 e^{-i(-\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)/2} \\ tY_2 = Y_2 e^{i(-\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Y}_2 = \hat{Y}_2 e^{-i(-\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tY_3 = Y_3 e^{i(-\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Y}_3 = \hat{Y}_3 e^{-i(-\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2} \\ tY_4 = Y_4 e^{i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}, & t\hat{Y}_4 = \hat{Y}_4 e^{-i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tZ_1 = Z_1 e^{i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Z}_1 = \hat{Z}_1 e^{-i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2} \\ tZ_2 = Z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Z}_2 = \hat{Z}_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2} \\ tZ_3 = Z_3 e^{i(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2}, & t\hat{Z}_3 = \hat{Z}_3 e^{-i(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2} \\ tZ_4 = Z_4 e^{i(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}, & t\hat{Z}_4 = \hat{Z}_4 e^{-i(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2} \end{cases}$$

がなりたつ．(計算は $SO(2n+1)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $(\boldsymbol{R}^{2n+1})^C$ のとき(166頁)と同様である)．これらの式は命題の初めの3つの式を示している．$j^*(\Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C))$ の計算は $j^*(\mathfrak{I}_1{}^C)=\sum_{i=1}^{4}(z_i+z_i{}^{-1})$ の右辺から単項を2つとり出して掛け，それらの ${}_8C_2=28$ 個の項を加えるとよい(補題2.15)がその結果が $4+\sum_{i\neq j}z_i{}^{\varepsilon_i}z_j{}^{\varepsilon_j}$ となる．よって $j^*(\Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C))=4+\sum_{i\neq j}z_i{}^{\varepsilon_i}z_j{}^{\varepsilon_j}$ を得る．$j^*(\Lambda^2(\mathfrak{I}_2{}^C))$，$j^*(\Lambda^2(\mathfrak{I}_3{}^C))$ も同じ計算をするとよいが，その計算結果はいずれも $j^*(\Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C))$ と同じ $4+\sum_{i\neq j}z_i{}^{\varepsilon_i}z_j{}^{\varepsilon_j}$ となっている．以上で命題が証明された．

$j^*(\Lambda^r(\mathfrak{I}_1{}^C))$，$j^*(\mathfrak{I}_2{}^C)$，$j^*(\mathfrak{I}_3{}^C)$ はそれぞれ命題4.65, 4.72の $j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^8))^C))$，$\Delta_8{}^-$，$\Delta_8{}^+$ に対応しているので，定理4.81より

$$R(Spin(8))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{I}_1{}^C),\ \Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C),\ \mathfrak{I}_3{}^C,\ \mathfrak{I}_2{}^C]$$

となる．また $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$ が $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群であることに注意すると，定理4.82より

$$RO(Spin(8))=\boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{I}_1),\ \Lambda^2(\mathfrak{I}_1),\ \mathfrak{I}_3,\ \mathfrak{I}_2]$$

にもなる．定理4.81と記号をあわせるために $\mathfrak{I}_1{}^C=\lambda_1$, $\Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C)=\lambda_2$, $\mathfrak{I}_3{}^C=\Delta_8{}^+$, $\mathfrak{I}_2{}^C=\Delta_8{}^-$ とおいて，つぎの定理を述べておく．したがって異なるものに同じ記号 λ_i が用いられている．

定理 5.67　$k: Spin(7)\to Spin(8)$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

$$k^*: R(Spin(8))=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \Delta_8{}^+,\ \Delta_8{}^-]\to R(Spin(7))=\boldsymbol{Z}[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \Delta_7]$$

は

$$k^*(\lambda_1)=1+\lambda_1,\quad k^*(\lambda_2)=\lambda_1+\lambda_2,\quad k^*(\Delta_8{}^+)=k^*(\Delta_8{}^-)=\Delta_7$$

で与えられる．実表現環 $RO(Spin(8))$, $RO(Spin(7))$ についても同様なことがなりたつ．

証明　$Spin(7)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ (定理5.30)は，$Spin(8)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ (定理5.36)において，$\theta_1\to 0$, $\theta_2\to\theta_1$, $\theta_3\to\theta_2$, $\theta_4\to\theta_3$ とおきかえたものになっている．したがって $Spin(8)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{I}_1{}^C$, $\Lambda^2(\mathfrak{I}_1{}^C)$, $\mathfrak{I}_2{}^C$, $\mathfrak{I}_3{}^C$ を $Spin(7)$-$\boldsymbol{C}$-加群とみなすとき，これをさらに $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみて $R(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2},\ z_1{}^{-1/2},\ z_2{}^{1/2},\ z_2{}^{-1/2},\ z_3{}^{1/2},\ z_3{}^{-1/2}]$ におけるその

形は，命題5.66において $z_1 \to 1$, $z_2 \to z_1$, $z_3 \to z_2$, $z_4 \to z_3$ とおきかえたものである．このことから容易に定理が導かれる．

(11) 再び $R(Spin(9))$, $RO(Spin(9))$ について

$$\mathfrak{J}_{01} = \{X \in \mathfrak{J} \mid E_1 \circ X = 0,\ \mathrm{tr}(X) = 0\},\ \mathfrak{J}_{23} = \{Y \in \mathfrak{J} \mid 2E_1 \circ Y = Y\}$$

は $Spin(9)$-$\boldsymbol{R}$-加群である．これらを $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群とみるとき，つぎの補題がなりたつ．

補題 5.68 つぎの $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群の直和分解が存在する．

$$\mathfrak{J}_{01} \cong \boldsymbol{R} \oplus \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_{23} = \mathfrak{J}_2 \oplus \mathfrak{J}_3$$

証明 $\mathfrak{J}_{01}$ において $E_2 - E_3$ より生成される $\boldsymbol{R}$-加群 V は自明 $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$- 加群であって，$Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群の直和 $\mathfrak{J}_{01} = V \oplus \mathfrak{J}_1$ を得る．$\mathfrak{J}_{23} = \mathfrak{J}_2 \oplus \mathfrak{J}_3$ は明らかである．

$Spin(9)$ の階数は4であるから，$Spin(9)$ の極大トーラスとして定理5.36で示した $Spin(8)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ をとり，$\tilde{j} : \tilde{T} \to Spin(9)$ を包含写像とし，$j = \tilde{j}\pi$: $\boldsymbol{T} \to Spin(9)$ とおく．さて $Spin(9)$-$\boldsymbol{R}$-加群 $\mathfrak{J}_{01}$, $\mathfrak{J}_{23}$ の複素化 $Spin(9)$-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}$, $\mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}}$ を調べよう．これらを $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_4{}^{1/2}, z_4{}^{-1/2}]$ においてつぎのようになる．

命題 5.69 $j^*(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}) = 1 + \sum_{i=1}^{4} (z_i + z_i{}^{-1})$

$$j^*(\mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}}) = \sum_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4} z_1{}^{\varepsilon_1/2} z_2{}^{\varepsilon_2/2} z_3{}^{\varepsilon_3/2} z_4{}^{\varepsilon_4/2} = \prod_{i=1}^{4} (z_i{}^{1/2} + z_i{}^{-1/2})$$

証明 補題5.68を複素化して $Spin(8)$-$\boldsymbol{C}$-加群の，したがって $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群としての直和分解

$$\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}} \cong \boldsymbol{C} \oplus \mathfrak{J}_1{}^{\boldsymbol{C}} \qquad \mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}} \cong \mathfrak{J}_2{}^{\boldsymbol{C}} \oplus \mathfrak{J}_3{}^{\boldsymbol{C}}$$

を得る．命題はこれらと命題5.66の結果である．

$j^*(\Lambda^r(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}))$, $j^*(\mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}})$ はそれぞれ命題4.37, 4.57の $j^*(\Lambda^r((\boldsymbol{R}^9)^{\boldsymbol{C}}))$, Δ_9 に対応しているので，定理4.59より

$$R(Spin(9)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}), \Lambda^2(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}), \Lambda^3(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}), \mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}}]$$

となる．また $\mathfrak{J}_{01}$, $\mathfrak{J}_{23}$ が $Spin(9)$-$\boldsymbol{R}$-加群であることに注意すると，定理4.60より

$$RO(Spin(9)) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{J}_{01}), \Lambda^2(\mathfrak{J}_{01}), \Lambda^3(\mathfrak{J}_{01}), \mathfrak{J}_{23}]$$

にもなる．定理4.59と記号をあわせるために，$\Lambda^1(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}) = \lambda_1$, $\Lambda^2(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}) = \lambda_2$, $\Lambda^3(\mathfrak{J}_{01}{}^{\boldsymbol{C}}) = \lambda_3$, $\mathfrak{J}_{23}{}^{\boldsymbol{C}} = \Delta_9$ とおいて，つぎの定理を述べておく．したがって異なるものに同じ記号 λ_i が用いられている．

定 理 5.70　k: $Spin(8) \to Spin(9)$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

$$k^*: R(Spin(9)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Delta_9] \to R(Spin(8)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \Delta_8^+, \Delta_8^-]$$

は

$k^*(\lambda_1) = 1 + \lambda_1$,　$k^*(\lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2$,　$k^*(\lambda_3) = -\lambda_1 + \lambda_2 + \Delta_8^+\Delta_8^-$,　$k^*(\Delta_9) = \Delta_8^+ + \Delta_8^-$

で与えられる．

証 明　$k^*(\lambda_1) = 1 + \lambda_1$, $k^*(\Delta_9) = \Delta_8^+ + \Delta_8^-$ は命題5.66, 5.69より明らかである．残りの2つの式も，両辺を $R(\boldsymbol{T})$ の元とみて計算すると一致することから，この結果を得る．

(12)　F_4-C-加群 $\mathfrak{J}_0{}^C$

$$\mathfrak{J}_0 = \{X \in \mathfrak{J} \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

とおくと，$\mathfrak{J}_0$ は26次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．さらに $x \in F_4$, $X \in \mathfrak{J}_0$ ならば $xX \in \mathfrak{J}_0$ となる（命題5.47）から，$\mathfrak{J}_0$ は F_4-$\boldsymbol{R}$-加群である．この $\mathfrak{J}_0$ を $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群とみるとき，つぎの補題を得る．

補 題 5.71　つぎの $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群の直和分解が存在する．

$$\mathfrak{J}_0 \cong \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \mathfrak{J}_1 \oplus \mathfrak{J}_2 \oplus \mathfrak{J}_3$$

証 明　$\mathfrak{J}_0$ において $E_1 - E_2$, $E_2 - E_3$ より生成される $\boldsymbol{R}$-加群をそれぞれ V_1, V_2 とすると，いずれも自明 $Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群であって，$Spin(8)$-$\boldsymbol{R}$-加群の直和分解 $\mathfrak{J}_0 = V_1 \oplus V_2 \oplus \mathfrak{J}_1 \oplus \mathfrak{J}_2 \oplus \mathfrak{J}_3$ を得る．

F_4 の極大トーラスとして定理5.36で示した $Spin(8)$ の極大トーラス $\tilde{T}$ をとり，$\tilde{j}$: $\tilde{T} \to F_4$ を包含写像とし，$\boldsymbol{j} = \tilde{j}\pi$: $\boldsymbol{T} \to F_4$ とおく．さて F_4-$\boldsymbol{R}$-加群 $\mathfrak{J}_0$ の複素化 F_4-$\boldsymbol{C}$-加群 $\mathfrak{J}_0{}^C$ を調べよう．この $\mathfrak{J}_0{}^C$ を $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき，$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_4{}^{1/2}, z_4{}^{-1/2}]$ においてつぎのようになる．ただし $R(\boldsymbol{T})$ において，つぎの記号を用いることにする（命題5.66参照）．

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{4}(z_i + z_i{}^{-1})$$

$$\boldsymbol{b} = \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = -1} z_1{}^{\varepsilon_1/2}z_2{}^{\varepsilon_2/2}z_3{}^{\varepsilon_3/2}z_4{}^{\varepsilon_4/2}$$

$$\boldsymbol{c} = \sum_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = 1} z_1{}^{\varepsilon_1/2}z_2{}^{\varepsilon_2/2}z_3{}^{\varepsilon_3/2}z_4{}^{\varepsilon_4/2}$$

$$\boldsymbol{d} = 4 + \sum_{i \neq j} z_i{}^{\varepsilon_i}z_j{}^{\varepsilon_j}$$

命 題 5.72　$j^*(\mathfrak{J}_0{}^C) = 2 + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

$$j^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_0{}^C)) = 1 + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + 3\boldsymbol{d}$$

$$j^*(\Lambda^3(\mathfrak{J}_0{}^C)) = 3(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + \boldsymbol{abc} + 6\boldsymbol{d} + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}$$

証明　補題5.71を複素化して $Spin(8)$-$\boldsymbol{C}$-加群の，したがって $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群としての直和分解

$$\mathfrak{J}_0{}^C \cong \boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C} \oplus \mathfrak{J}_1{}^C \oplus \mathfrak{J}_2{}^C \oplus \mathfrak{J}_3{}^C$$

を得る．よって $j^*(\mathfrak{J}_0{}^C) = 2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ は命題5.66の結果である．$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{4}(z_i + z_i{}^{-1})$ の右辺から単項を2つとり出して掛け，それら ${}_8C_2 = 28$ 個の項の和を $\boldsymbol{a}_2$ で表わす．同様に $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}_2$ を定義すると命題5.66より

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{d}$$

となっている．さて

$$\begin{aligned} j^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_2{}^C)) &= (2+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_2 \\ &= 1 + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2 \\ &= 1 + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + 3\boldsymbol{d} \end{aligned}$$

となる．最後に $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{4}(z_i + z_i{}^{-1})$ の右辺から単項を3つとり出して掛け，それら ${}_8C_3 = 56$ 個の和を $\boldsymbol{a}_3$ で表わすことにする．同様に $\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{c}_3$ を定義するとき

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{bc} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{ca} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{c}$$

がなりたつことが実際に計算することにより確かめられる．さて

$$\begin{aligned} j^*(\Lambda^3(\mathfrak{J}_3{}^C)) &= (2+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_3 \\ &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + 2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{c}_2) + 2(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) \\ &\quad + (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{c}_3) + \boldsymbol{abc} \\ &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) + 6\boldsymbol{d} + 2(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \\ &\quad + (\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{ca}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{abc} \\ &= 3(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}) + \boldsymbol{abc} + 6\boldsymbol{d} + 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \end{aligned}$$

となり命題を得る．

(13)　F_4-C-加群 $\mathfrak{F}_4{}^C$

F_4 の Lie 環 $\mathfrak{F}_4$ において $x \in F_4$ の作用を

$$(x\cdot\eta)(X) = x(\eta(x^{-1}X)) \qquad \eta \in \mathfrak{F}_4,\ X \in \mathfrak{J}$$

と定義すると，$\mathfrak{F}_4$ は F_4-$\boldsymbol{R}$-加群になる．したがって，その複素化 $\mathfrak{F}_4{}^C$ は F_4-$\boldsymbol{C}$-加群である．

この $\mathfrak{F}_4{}^C$ を T-C-加群とみて既約 T-C-加群に分解するために，$Spin(8)$ の作用についてもう少し準備しよう．

$$\mathfrak{M}^r=\{X\in M(3,\mathfrak{C})\,|\,X\text{の対角線の各元が実数}\}$$

とおく．$\mathfrak{M}^r$ は51次元 $\boldsymbol{R}$-加群である．$\mathfrak{M}^r$ において積を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+Y^*X^*)$$

と定義する．そして $\mathfrak{M}^r$ において $x=(x_1,x_2,x_3)\in Spin(8)$ の作用を

$$x\begin{pmatrix}\xi_1 & u_{12} & u_{13}\\ u_{21} & \xi_2 & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3u_{12} & \overline{x_2\overline{u}_{13}}\\ \overline{x_3\overline{u}_{21}} & \xi_2 & x_1u_{23}\\ x_2u_{31} & \overline{x_1\overline{u}_{32}} & \xi_3\end{pmatrix}$$

と定義する．このとき，つぎの補題がなりたつ．

補 題 5.73　$x\in Spin(8)$ は $\mathfrak{M}^r$ の自己同型写像をひきおこす．すなわち $x:\mathfrak{M}^r\to\mathfrak{M}^r$ は $\boldsymbol{R}$-同型写像であって

$$x(X\circ Y)=xX\circ xY\qquad X,\ Y\in\mathfrak{M}^r$$

をみたす．

証 明　$x:\mathfrak{M}^r\to\mathfrak{M}^r$ が $\boldsymbol{R}$-同型写像であることは明らかである．

$$x=(x_1,x_2,x_3),\ X=\begin{pmatrix}\xi_1 & u_{12} & u_{13}\\ u_{21} & \xi_2 & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & \xi_3\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}\eta_1 & v_{12} & v_{13}\\ v_{21} & \eta_2 & v_{23}\\ v_{31} & v_{32} & \eta_3\end{pmatrix}\quad\text{とするとき}$$

$xX\circ xY$ の $(1,1)$-成分

$$=\frac{1}{2}(\xi_1\eta_1+(x_3u_{12})(\overline{x_3\overline{v}_{21}})+(\overline{x_2\overline{u}_{13}})(x_2v_{31})+\eta_1\xi_1+(x_3\overline{v}_{21})(\overline{x_3u_{12}})$$
$$+(\overline{x_2v_{31}})(x_2\overline{u}_{13}))=\xi_1\eta_1+(x_3u_{12},x_3\overline{v}_{21})+(x_2v_{31},x_2\overline{u}_{13})\ (208\text{頁}\ 5)$$
$$=\xi_1\eta_1+(u_{12},\overline{v}_{21})+(v_{31},\overline{u}_{13})$$
$$=\frac{1}{2}(\xi_1\eta_1+u_{12}v_{21}+u_{13}v_{31}+\eta_1\xi_1+\overline{v}_{21}\overline{u}_{12}+\overline{v}_{31}\overline{u}_{13})$$
$$=x(X\circ Y)\ \text{の}\ (1,1)\text{-成分}$$

$xX\circ xY$ の $(2,3)$-成分

$$=\frac{1}{2}((\overline{x_3\overline{u}_{21}})(\overline{x_2\overline{v}_{31}})+\xi_2(x_1v_{23})+(x_1u_{23})\eta_3+(\overline{x_3v_{12}})(\overline{x_2u_{31}})+\eta_2(x_1\overline{u}_{32})$$
$$+(x_1\overline{v}_{32})\xi_3)$$

($(\overline{x_3\bar{u}_{21}})(\overline{x_2\bar{v}_{13}}) = \overline{(x_2\bar{v}_{13})(x_3\bar{u}_{21})} = x_1(u_{21}v_{13})$, 同様に $(\overline{x_3v_{12}})(\overline{x_2u_{31}}) = x_1(\bar{v}_{12}\bar{u}_{31})$ であるから)

$$= \frac{1}{2}x_1(u_{21}v_{13} + \xi_2v_{23} + u_{23}\eta_3 + \bar{v}_{12}\bar{u}_{31} + \eta_2\bar{u}_{32} + \bar{v}_{32}\xi_3)$$

$= x(X\circ Y)$ の (2, 3)-成分

がなりたつ. 他の成分についても同様な計算をすると一致するので $x(X\circ Y) = xX\circ xY$ を得る.

補題 5.74 $x \in Spin(8)$, $A \in \mathfrak{M}^- \cap \mathfrak{M}^r$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ならば $\mathfrak{F}_4$ において

$$x\cdot\tilde{A} = \widetilde{xA}$$

がなりたつ.

証明 まず $A \in \mathfrak{M}^- \cap \mathfrak{M}^r$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ならば, $x \in Spin(8)$ に対して $xA \in \mathfrak{M}^- \cap \mathfrak{M}^r$, $\mathrm{tr}(xA) = 0$ であることに注意しよう. よって $x\cdot\tilde{A}$, $\widetilde{xA}$ はともに $\mathfrak{F}_4$ の元である (命題5.64). さて補題5.73より $x(A\circ X) = xA\circ xX$, $x(AX + X^*A^*) = (xA)(xX) + (xX)^*(xA)^*$, $X \in \mathfrak{J}$ がなりたつ. しかるに $A^* = -A$, $(xA)^* = -xA$ であるから

$$x(AX - XA) = (xA)(xX) - (xX)(xA)$$

すなわち

$$x(\tilde{A}X) = \widetilde{xA}(xX)$$

となる. X のかわりに $x^{-1}X$ とおくと

$$x(\tilde{A}(x^{-1}X)) = \widetilde{xA}(X)$$

となるが, これは $x\cdot\tilde{A} = \widetilde{xA}$ を示している.

さて $\mathfrak{F}_4{}^C$ を $\boldsymbol{T}$-$\boldsymbol{C}$-加群とみるとき, $R(\boldsymbol{T})$ においてつぎのようになる.

命題 5.75　　$j^*(\mathfrak{F}_4{}^C) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$

証明 G_{ij}, $i, j = 0, 1, \cdots, 7$, $i < j$ を201頁で用いた $\mathfrak{D}_4$ の基とし, $A_i{}^a$, $i = 1, 2, 3$ は269頁で定義した行列とする. さて $\mathfrak{F}_4{}^C$ に C-基をつぎのように選ぶ.

$$H_1 = G_{01}\otimes 1, \qquad H_2 = G_{23}\otimes 1, \qquad H_3 = G_{45}\otimes 1, \qquad H_4 = G_{67}\otimes 1$$

$$U_{12} = (G_{02} + G_{13})\otimes 1 + (G_{03} - G_{12})\otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{12} = (G_{02} + G_{13})\otimes \boldsymbol{i} + (G_{03} - G_{12})\otimes 1$$

$$U_{13} = (G_{04} + G_{15})\otimes 1 + (G_{05} - G_{14})\otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{13} = (G_{04} + G_{15})\otimes \boldsymbol{i} + (G_{05} - G_{14})\otimes 1$$

$$U_{14} = (G_{06} + G_{17})\otimes 1 + (G_{07} - G_{16})\otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{14} = (G_{06} + G_{17}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{07} - G_{16}) \otimes 1$$

$$U_{23} = (G_{24} + G_{35}) \otimes 1 + (G_{25} - G_{34}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{23} = (G_{24} + G_{35}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{25} - G_{34}) \otimes 1$$

$$U_{24} = (G_{26} + G_{37}) \otimes 1 + (G_{27} - G_{36}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{24} = (G_{26} + G_{37}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{27} - G_{36}) \otimes 1$$

$$U_{34} = (G_{46} + G_{57}) \otimes 1 + (G_{47} - G_{56}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{U}_{34} = (G_{46} + G_{57}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{47} - G_{56}) \otimes 1$$

$$V_{12} = (G_{02} - G_{13}) \otimes 1 - (G_{03} + G_{12}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{12} = -(G_{02} - G_{13}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{03} + G_{12}) \otimes 1$$

$$V_{13} = (G_{04} - G_{15}) \otimes 1 - (G_{05} + G_{14}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{13} = -(G_{04} - G_{15}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{05} + G_{14}) \otimes 1$$

$$V_{14} = (G_{06} - G_{17}) \otimes 1 - (G_{07} + G_{16}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{14} = -(G_{06} - G_{17}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{07} + G_{16}) \otimes 1$$

$$V_{23} = (G_{24} - G_{35}) \otimes 1 - (G_{25} + G_{34}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{23} = -(G_{24} - G_{35}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{25} + G_{34}) \otimes 1$$

$$V_{24} = (G_{26} - G_{37}) \otimes 1 - (G_{27} + G_{36}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{24} = -(G_{26} - G_{37}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{27} + G_{36}) \otimes 1$$

$$V_{34} = (G_{46} - G_{57}) \otimes 1 - (G_{47} + G_{56}) \otimes \boldsymbol{i},$$

$$\hat{V}_{34} = -(G_{46} - G_{57}) \otimes \boldsymbol{i} + (G_{47} + G_{56}) \otimes 1$$

$$X_i = \tilde{A}_1{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - \tilde{A}_1{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{X}_i = -\tilde{A}_1{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + \tilde{A}_1{}^{e_{2i-1}} \otimes 1$$

$$Y_i = \tilde{A}_2{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - \tilde{A}_2{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{Y}_i = -\tilde{A}_2{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + \tilde{A}_2{}^{e_{2i-1}} \otimes 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$Z_i = \tilde{A}_3{}^{e_{2i-2}} \otimes 1 - \tilde{A}_3{}^{e_{2i-1}} \otimes \boldsymbol{i}, \quad \hat{Z}_i = -\tilde{A}_3{}^{e_{2i-2}} \otimes \boldsymbol{i} + \tilde{A}_3{}^{e_{2i-1}} \otimes 1$$

このとき $t = (t_1, t_2, t_3) = (t_1(\boldsymbol{\theta}), t_2(\boldsymbol{\theta}), t_3(\boldsymbol{\theta})) \in \tilde{T}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ に対して

$$t \cdot H_i = H_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$t \cdot U_{ij} = U_{ij} e^{i(\theta_i - \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{U}_{ij} = \hat{U}_{ij} e^{-i(\theta_i - \theta_j)} \qquad i < j$$

$$t \cdot V_{ij} = V_{ij} e^{i(\theta_i + \theta_j)}, \qquad t \cdot \hat{V}_{ij} = \hat{V}_{ij} e^{-i(\theta_i + \theta_j)} \qquad i < j$$

$$t \cdot X_i = X_i e^{i\theta_i}, \qquad t \cdot \hat{X}_i = \hat{X}_i e^{-i\theta_i} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$t \cdot Y_1 = Y_1 e^{i(-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)/2}, \qquad t \cdot \hat{Y}_1 = \hat{Y}_1 e^{-i(-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)/2}$$

$$t \cdot Y_2 = Y_2 e^{i(-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)/2}, \qquad t \cdot \hat{Y}_2 = \hat{Y}_2 e^{-i(-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)/2}$$

$$t \cdot Y_3 = Y_3 e^{i(-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4)/2}, \qquad t \cdot \hat{Y}_3 = \hat{Y}_3 e^{-i(-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4)/2}$$

$$t\cdot Y_4 = Y_4 e^{i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}, \qquad t\cdot \hat{Y}_4 = \hat{Y}_4 e^{-i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}$$
$$t\cdot Z_1 = Z_1 e^{i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}, \qquad t\cdot \hat{Z}_1 = \hat{Z}_1 e^{-i(-\theta_1-\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}$$
$$t\cdot Z_2 = Z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}, \qquad t\cdot \hat{Z}_2 = \hat{Z}_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)/2}$$
$$t\cdot Z_3 = Z_3 e^{i(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2}, \qquad t\cdot \hat{Z}_3 = \hat{Z}_3 e^{-i(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)/2}$$
$$t\cdot Z_4 = Z_4 e^{i(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}, \qquad t\cdot \hat{Z}_4 = \hat{Z}_4 e^{-i(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)/2}$$

がなりたつ．実際，H_i, $i=1,2,3,4$, U_{ij}, $\hat{U}_{ij}$, V_{ij}, $\hat{V}_{ij}$, $i<j$ は $\mathfrak{D}_4{}^C$ の C-基である（202頁注意）から，$t\cdot H_i$, $t\cdot U_{ij}$, $t\cdot\hat{U}_{ij}$, $t\cdot V_{ij}$, $t\cdot\hat{V}_{ij}$ の計算は定理4.79の証明において既に示されている結果である．

$$\begin{aligned}
t\cdot X_1 &= t\cdot(\tilde{A}_1{}^{e_0}\otimes 1 - \tilde{A}_1{}^{e_1}\otimes \boldsymbol{i}) = t\cdot\tilde{A}_1{}^{e_0}\otimes 1 - t\cdot\tilde{A}_1{}^{e_1}\otimes\boldsymbol{i}\\
&= \widetilde{tA_1{}^{e_0}}\otimes 1 - \widetilde{tA_1{}^{e_1}}\otimes\boldsymbol{i} \quad (\text{補題}5.74)\\
&= \tilde{A}_1{}^{t_1e_0}\otimes 1 - \tilde{A}_1{}^{t_1e_1}\otimes\boldsymbol{i}\\
&= \tilde{A}_1{}^{e_0\cos\theta_1+e_1\sin\theta_1}\otimes 1 - \tilde{A}_1{}^{-e_0\sin\theta_1+e_1\cos\theta_1}\otimes\boldsymbol{i}\\
&= \tilde{A}_1{}^{e_0}\otimes\cos\theta_1 + \tilde{A}_1{}^{e_1}\otimes\sin\theta_1 + \tilde{A}_1{}^{e_0}\otimes\boldsymbol{i}\sin\theta_1 - \tilde{A}_1{}^{e_1}\otimes\boldsymbol{i}\cos\theta_1\\
&= (\tilde{A}_1{}^{e_0}\otimes 1 - \tilde{A}_1{}^{e_1}\otimes\boldsymbol{i})(\cos\theta_1 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1)\\
&= X_1 e^{i\theta_1}
\end{aligned}$$

他の $t\cdot X_i$, $t\cdot\hat{X}_i$, $t\cdot Y_i$, $t\cdot\hat{Y}_i$, $t\cdot Z_i$, $t\cdot\hat{Z}_i$ の計算も同様である．以上より

$$\begin{aligned}
j^*(\mathfrak{F}_4{}^C) &= 4 + \sum_{i\neq j} z_i{}^{\varepsilon_i} z_j{}^{\varepsilon_j} + \sum_{i=1}^{4}(z_i + z_i{}^{-1}) + \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4} z_1{}^{\varepsilon_1/2} z_2{}^{\varepsilon_2/2} z_3{}^{\varepsilon_3/2} z_4{}^{\varepsilon_4/2}\\
&= \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}
\end{aligned}$$

となる．

(14) F_4 の複素表現環と実表現環

$R(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}[z_1{}^{1/2}, z_1{}^{-1/2}, \cdots, z_4{}^{1/2}, z_4{}^{-1/2}]$ において

$$j^*(\mathfrak{J}_0{}^C) = \lambda_1, \quad j^*(\Lambda^2(\mathfrak{J}_0{}^C)) = \lambda_2, \quad j^*(\Lambda^3(\mathfrak{J}_0{}^C)) = \lambda_3, \quad j^*(\mathfrak{F}_4{}^C) = \mathfrak{f}_4$$

とおく．このとき命題5.72, 5.75を解くと，つぎの補題を得る．

補 題 5.76　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \lambda_1 - 2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca} &= \lambda_1 + \lambda_2 - 3\mathfrak{f}_4 - 3\\
\boldsymbol{abc} &= -5\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 + 7\mathfrak{f}_4 + 2\lambda_1{}^2 - 2\lambda_1\mathfrak{f}_4 + 5\\
\boldsymbol{d} &= -\lambda_1 + \mathfrak{f}_4 + 2
\end{aligned}$$

さて包含関係

$$R(F_4) \subset R(\tilde{T})^{W(F_4)} \subset R(\boldsymbol{T})$$

において，$R(F_4)$ は4つの元 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ をもっている．$R(F_4)$ が，そのために $R(\tilde{T})^{W(F_4)}$ が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ より環として生成されることを示そう．

$$R(\tilde{T})^{W(F_4)} = R(\tilde{T})^{W(Spin(8))\mathfrak{S}_3} \text{（定理 5.57）}$$
$$= (R(\tilde{T})^{W(Spin(8))})^{\mathfrak{S}_3} \text{（補題 1.52）}$$

ここで $R(\tilde{T})^{W(Spin(8))} = R(Spin(8))$（205頁注意）$= \boldsymbol{Z}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$（273頁）であるから，上式は

$$R(\tilde{T})^{W(F_4)} = (\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}])^{\mathfrak{S}_3}$$

となる．$\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ における $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ の作用は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対しては，それらの置換をひきおこし（補題5.58），$\boldsymbol{d}$ に対しては恒等的に働いている $(\sigma(\boldsymbol{d}) = \sigma(\boldsymbol{a}_2) = (\sigma \boldsymbol{a})_2 = \boldsymbol{d}$（命題5,66））．よって $(\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}])^{\mathfrak{S}_3}$ の元は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の基本対称式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}, \boldsymbol{abc}$ および $\boldsymbol{d}$ の多項式で表わされる（定理4.3(2)）．しかるに $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}, \boldsymbol{abc}, \boldsymbol{d}$ は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ を用いて補題5.76のようにかけているので，$R(\tilde{T})^{W(F_4)}$ の元は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ の多項式で表わされる．よって $R(F_4) = R(\tilde{T})^{W(F_4)}$ となり，$R(F_4)$ が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ より環として生成されることがわかった．

つぎに $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ が代数的独立であることを示そう．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は代数的独立であるから，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}, \boldsymbol{abc}, \boldsymbol{d}$ も代数的独立である（定理4.3(3)）．命題5.72，5.75より，もし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ に代数的関係があると，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}, \boldsymbol{abc}, \boldsymbol{d}$ の間にも代数的関係が生じるので，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4$ は代数的独立である．以上より次の定理を得る．

定 理 5.77 F_4 の複素表現環 $R(F_4)$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4]$ に環同型である：

$$R(F_4) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{J}_0{}^C), \Lambda^2(\mathfrak{J}_0{}^C), \Lambda^3(\mathfrak{J}_0{}^C), \mathfrak{F}_4{}^C]$$

$\mathfrak{J}_0, \mathfrak{F}_4$ がともに F_4-$\boldsymbol{R}$-加群であることに注意すると，命題3.4より F_4 の実表現環も決定される．

定 理 5.78 F_4 の実表現環 $RO(F_4)$ は多項式環 $\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4]$ に環同型である：

$$RO(F_4) = \boldsymbol{Z}[\Lambda^1(\mathfrak{J}_0), \Lambda^2(\mathfrak{J}_0), \Lambda^3(\mathfrak{J}_0), \mathfrak{F}_4]$$

最後に $R(F_4)$ と $R(Spin(9))$ の関係を述べて本稿を終ることにしよう．異なるものに同じ記号 λ_i が用いられているのは今までと同じである．

定 理 5.79 $k: Spin(9) \to F_4$ を包含写像とする．このとき環準同型写像

$$k^*: R(F_4) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}_4] \to R(Spin(9)) = \boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Delta_9]$$

は

$$k^*(\lambda_1) = 1 + \lambda_1 + \varDelta_9$$

$$k^*(\lambda_2) = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \varDelta_9 + \lambda_1\varDelta_9$$

$$k^*(\lambda_3) = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - \varDelta_9 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\varDelta_9 + 2\lambda_2\varDelta_9$$

$$k^*(\mathfrak{f}_4) = \lambda_2 + \varDelta_9$$

で与えられる．実表現環 $RO(F_4)$, $RO(Spin(9))$ についても同様なことがなりたつ．

証 明　定理5.70より $R(Spin(9))$ の $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \varDelta_9$ は

$$\lambda_1 = 1 + \boldsymbol{a}, \quad \lambda_2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}, \quad \lambda_3 = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{bc}, \quad \varDelta_9 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

となっている．これを解くと

$$\boldsymbol{a} = -1 + \lambda_1, \quad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \varDelta_9, \quad \boldsymbol{bc} = -2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \quad \boldsymbol{d} = 1 - \lambda_1 + \lambda_2$$

となる．これらより

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -1 + \lambda_1 + \varDelta_9$$

$$\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = -2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \varDelta_9 + \lambda_1\varDelta_9$$

$$\boldsymbol{abc} = 2 - 4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3$$

$$\boldsymbol{d} = 1 - \lambda_1 + \lambda_2$$

となるので，これらを命題5.72, 5.75に代入すると定理を得る．

ま と め

G	$W(G)$	$W(G)$ の位数	$R(G)$	$RO(G)$
$U(n)$	$\mathfrak{S}_n$	$n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$	
$SU(n)$	$\mathfrak{S}_n$	$n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}]$	
$Spin(2n+1)$	$\mathfrak{S}_n^{\pm}$	$2^n n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \Delta]$	$RO(Spin(8n \pm 1))$ は決定
$SO(2n+1)$	$\mathfrak{S}_n^{\pm}$	$2^n n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$
$Sp(n)$	$\mathfrak{S}_n^{\pm}$	$2^n n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$	
$Spin(2n)$	$\mathfrak{S}_n^{+}$	$2^{n-1} n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-2}, \Delta^+, \Delta^-]$	$RO(Spin(8n))$ は決定
$SO(2n)$	$\mathfrak{S}_n^{+}$	$2^{n-1} n!$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^+, \lambda_n^-]/\sim$	$RO(SO(4n))$ は決定
G_2	$\mathfrak{S}_3 \times S^0$	12	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$
F_4	$\mathfrak{S}_4^{\pm}\mathfrak{S}_3$	1152	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}]$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathfrak{f}]$
E_6		51840	$\boldsymbol{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_6]$	
E_7		2903040	$\boldsymbol{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_7]$	
E_8		696729600	$\boldsymbol{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_8]$	
$O(2n+1)$			$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{2n+1}]/\sim$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{2n+1}]/\sim$
$O(2n)$			$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{2n}]/\sim$	$\boldsymbol{Z}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{2n}]/\sim$

主な等質空間

1. $O(n)/O(n-1) \simeq SO(n)/SO(n-1) \simeq Spin(n)/Spin(n-1) \simeq S^{n-1}$

$U(n)/U(n-1) \simeq SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$

$Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$

2. $O(n)/O(n-m) \simeq SO(n)/SO(n-m) \simeq Spin(n)/Spin(n-m) \simeq \boldsymbol{R}V_{n,m}$

$U(n)/U(n-m) \simeq SU(n)/SU(n-m) \simeq \boldsymbol{C}V_{n,m}$

$Sp(n)/Sp(n-m) \simeq \boldsymbol{H}V_{n,m}$

$\boldsymbol{R}V_{n,m}$, $\boldsymbol{C}V_{n,m}$, $\boldsymbol{H}V_{n,m}$ は Stiefel 多様体とよばれている.

3. $O(n)/(O(n-1) \times S^0) \simeq \boldsymbol{R}P_{n-1}$

$U(n)/(U(n-1) \times S^1) \simeq \boldsymbol{C}P_{n-1}$

$Sp(n)/(Sp(n-1) \times S^3) \simeq \boldsymbol{H}P_{n-1}$

4. $O(n+m)/(O(n) \times O(m)) \simeq \boldsymbol{R}G_{n,m}$

$$U(n+m)/(U(n)\times U(m))\simeq \boldsymbol{C}G_{n,m}$$

$$Sp(n+m)/(Sp(n)\times Sp(m))\simeq \boldsymbol{H}G_{n,m}$$

$\boldsymbol{R}G_{n,m}$, $\boldsymbol{C}G_{n,m}$, $\boldsymbol{H}G_{n,m}$ は **Grassmann 多様体** とよばれている.

$$SO(n+m)/(SO(n)\times SO(m))\simeq \boldsymbol{R}\tilde{G}_{n,m}$$

$\boldsymbol{R}\tilde{G}_{n,m}$ は**方向づけられた Grassmann 多様体**とよばれている.

5. $F_4\supset Spin(9)\supset Spin(8)\supset Spin(7)\supset G_2\supset SU(3)\supset SU(2)$

$F_4/Spin(9)\simeq \mathfrak{C}P_2$

$Spin(9)/Spin(7)\simeq S^{15}$　　$SO(9)/Spin(7)\simeq \boldsymbol{R}P_{15}$

$Spin(8)/Spin(7)\simeq S^{7}$　　$SO(8)/Spin(7)\simeq \boldsymbol{R}P_{7}$

$Spin(7)/G_2\simeq S^{7}$　　$SO(7)/G_2\simeq \boldsymbol{R}P_{7}$

$G_2/SU(3)\simeq S^{6}$　　$G_2/SU(2)\simeq \boldsymbol{R}V_{7,2}$

6. $U(n)/O(n)\simeq\{P\in U(n)\mid {}^tP=P\}$

$$SU(n)/SO(n)\simeq\{P\in SU(n)\mid {}^tP=P\}$$

7. $O(2n)/U(n)\simeq\{P\in O(2n)\mid {}^tP=-P\}$

$$U(2n)/Sp(n)\simeq\{P\in U(n)\mid {}^tP=-P\}$$

8. $Spin(2)\cong SO(2)\cong U(1)\cong S^1$

$Spin(3)\cong SU(2)\cong Sp(1)\cong S^3$

$Spin(4)\cong S^3\times S^3$

$Spin(5)\cong Sp(2)$

$Spin(6)\cong SU(4)$

6,7 を証明しておこう.

6. $X_n=\{P\in U(n)\mid {}^tP=P\}$ とおき, X_n における $A\in U(n)$ の作用を

$$A\cdot P=AP{}^tA \qquad P\in X_n$$

と定義すると, $U(n)$ は X_n に働く. つぎに $P\in X_n$ は

$$P=A{}^tA=AE{}^tA \qquad A\in U(n)$$

と表わされることを示そう. $P\in X_n$ ならば $P+\bar{P}$ と $\boldsymbol{i}(P-\bar{P})$ は可換な実対称行列であるから, ある $B\in O(n)$ により同時に実対角線形に変形される:

$${}^tB(P+\bar{P})B=\sum_{i=1}^n a_iE_i,\quad {}^tB\boldsymbol{i}(P-\bar{P})B=\sum_{i=1}^n b_iE_i \qquad a_i,\ b_i\in\boldsymbol{R}$$

この 2 つの式より

$${}^tBPB=\sum_{i=1}^n\frac{a_i-\boldsymbol{i}b_i}{2}E_i$$

となる. ${}^tBPB\in U(n)$ であるから $|(a_i-\boldsymbol{i}b_i)/2|=1$ である. $c_i{}^2=(a_i-\boldsymbol{i}b_i)/2$ となる $c_i\in\boldsymbol{C}$ をとり, 行列 $C=\sum_{i=1}^n c_iE_i$ をつくると $C\in U(n)$ であり, ${}^tBPB=CC=C{}^tC$ と

なる．よって $A=BC$ とおくと $P=BC{}^tC{}^tB=A{}^tA$, $A\in U(n)$ となる．これは $U(n)$ が X_n に推移的に働くことを示している．$E\in X_n$ における $U(n)$ の等方群は $O(n)$ であるから，命題1.58より位相同型 $U(n)/O(n)\simeq X_n$ を得る．もう1つの式も上記の B, C の行列式が1となるようにとると，X_n のときと同様にして証明される．

7. $Y_n=\{P\in O(2n)\,|\,{}^tP=-P\}$ とおき，Y_n における $A\in O(2n)$ の作用を

$$A\cdot P=AP{}^tA \qquad P\in Y_n$$

と定義すると，$O(2n)$ は Y_n に働く．

$$J=\left.\begin{pmatrix} J' & & \\ & \ddots & \\ & & J' \end{pmatrix}\right\}n \qquad J'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくとき，$P\in Y_n$ は

$$P=AJ{}^tA \qquad A\in O(2n)$$

と表わされることを示そう．一般に歪実対称行列 P, ${}^tP=-P$ はある $A\in O(2n)$ により実 Jordan 形

$${}^tAPA=\begin{pmatrix} \begin{matrix} & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} & \lambda_n \\ -\lambda_n & \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \lambda_i\in \boldsymbol{R}$$

に変形されるが，${}^tAPA\in O(2n)$ であるから（必要あれば A を変えて）$\lambda_i=1$, $i=1$, $\cdots$, n としてよい．よって ${}^tAPA=J$, すなわち $P=AJ{}^tA$, $A\in O(2n)$ となる．これは $O(2n)$ が Y_n に推移的に働くことを示している．$J\in Y_n$ における $O(2n)$ の等方群 $\{A\in O(2n)\,|\,AJ{}^tA=J\}$ は $U(n)$ に位相群同型である（[21] 例120）から，命題1.58より位相同型 $O(2n)/U(n)\simeq Y_n$ を得る．

$\boldsymbol{C}Y_n=\{P\in U(2n)\,|\,{}^tP=-P\}$ とおき，$\boldsymbol{C}Y_n$ における $A\in U(2n)$ の作用を

$$A\cdot P=AP{}^tA \qquad P\in \boldsymbol{C}Y_n$$

と定義すると，$U(2n)$ は $\boldsymbol{C}Y_n$ に働く．つぎに $P\in \boldsymbol{C}Y_n$ は

$$P=AJ{}^tA \qquad A\in U(2n)$$

と表わされることを示そう．P の固有値の1つを λ とし（$P\in U(2n)$ より $|\lambda|=1$ である），それに属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{a}|=1$ をとる：$P\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}$. 左から P^* をかけて $\boldsymbol{a}=\lambda P^*\boldsymbol{a}$, $\bar{\boldsymbol{a}}=\bar{\lambda}{}^tP\bar{\boldsymbol{a}}$ より $P\bar{\boldsymbol{a}}=-\lambda\boldsymbol{a}$ を得る．$\boldsymbol{C}^{2n}$ において $\boldsymbol{a}$, $\bar{\boldsymbol{a}}$ より生成される2次元部分 $\boldsymbol{C}$-加群を W とし，$\boldsymbol{C}^{2n}=W\oplus W^{\perp}$ と直和分解して，$W^{\perp}$ に帰納法を用いてわかることであるが，結局 $\boldsymbol{C}^{2n}$ に正規直交 $\boldsymbol{C}$-基 $\boldsymbol{a}_1$, $\bar{\boldsymbol{a}}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$, $\bar{\boldsymbol{a}}_n$ をとり

$$P\boldsymbol{a}_i=\lambda_i\boldsymbol{a}_i, \quad P\bar{\boldsymbol{a}}_i=-\lambda_i\bar{\boldsymbol{a}}_i, \quad i=1,\cdots,n$$

とすることができる．

$$\boldsymbol{b}_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_i+\bar{\boldsymbol{a}}_i),\quad \boldsymbol{b}_i'=\frac{-\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a}_i-\bar{\boldsymbol{a}}_i)\qquad i=1,\cdots,n$$

とおくと，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1', \cdots, \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n'$ は正規直交する実ベクトルであって

$$P\boldsymbol{b}_i=\lambda_i\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}_i',\ P\boldsymbol{b}_i'=-\lambda_i\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}_i\qquad i=1,\cdots,n$$

となる．よって行列 $B=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1', \cdots, \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n')$ をつくると

$${}^tBPB=\left(\begin{array}{cc|c|cc} & \lambda_1\boldsymbol{i} & & & \\ -\lambda_1\boldsymbol{i} & & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & & \lambda_n\boldsymbol{i} \\ & & & -\lambda_n\boldsymbol{i} & \end{array}\right)\qquad |\lambda_i|=1,\ B\in O(2n)$$

となる．$c_i^2=\lambda_i\boldsymbol{i}$ となる $c_i\in\boldsymbol{C}$ をとり，行列 $C=\left(\begin{array}{cc|c|cc} c_1 & & & & \\ & c_1 & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & c_n & \\ & & & & c_n \end{array}\right)$ をつくると，

$C\in U(2n)$ であって ${}^tBPB=CJC=CJ{}^tC$ となる．よって $A=BC$ とおくと $P=BCJ{}^tC{}^tB=AJ{}^tA,\ A\in U(2n)$ となる．これは $U(2n)$ が $\boldsymbol{C}Y_n$ に推移的に働くことを示している．$J\in\boldsymbol{C}Y_n$ における $U(2n)$ の等方群 $\{A\in U(2n)\,|\,AJ{}^tA=J\}$ は $Sp(n)$ に位相群同型である（[21] 例 120）から命題 1.58 より位相同型 $U(2n)/Sp(n)\simeq\boldsymbol{C}Y_n$ を得る．（なお 6, 7 の形の等質空間については， J. W. Milnor: Morse Theory, Princeton Univ. Press, 1963, §24 に詳しい）．

あとがき

本書と関係のある参考文献をいくつかあげて，さらに詳しく学ぼうと思う人の参考にしたいと思う．

1章の Clifford 多元環について

〔1〕 M. F. Atiyah-R. Bott-A. Shapiro: Clifford modules, Topology, 3. (Supplement 1), 1964.

に詳しい著述がある．ここでは Clifford 多元環と K 理論の周期性との関係が述べられている．1章の不変積分と2章の表現論については

〔2〕 L. S. Pontrjagin: Topological groups, (邦訳) 連続群論上，下，岩波書店，1957.

〔3〕 C. Chevalley: Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946.

〔4〕 A. Weil: L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

にも述べられている．〔2〕〔3〕〔4〕にかかれている表現論は Peter-Weyl の定理を目的としている．2章の表現論についてかかれた書は（上記の〔2〕〔3〕〔4〕以外にも）数多くある．しかし既版の書は有限群の表現を目的にかかれたものが大部分であるので，本書の3,4,5章を読むのに余り参考にならないと思う．したがって一般の表現論の参考書として，つぎの2つをあげておくにとどめる．

〔5〕 弥永昌吉-杉浦光夫: 応用数学者のための代数学，岩波書店，1960.

〔6〕 C. W. Curtis-I. Reiner: Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

4章の古典群の表現環については

〔7〕 D. Husemoller: Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

の Part II 13 を参照した．私の浅学のためか，今の所，私は〔7〕（およびつぎの〔10〕）以外に古典群の表現環についてかかれた参考文献を知らない．しかるに〔7〕の Part II 13 は私には必ずしも理解し易いものでなかったので，本書では我流に大幅なかき替えを試みた．したがって証明をやたらに繁雑にしたり，あるいは話をおかしくしたりしたのではないかと心配している．5章の例外群 G_2, F_4 については

〔8〕 H. Freudenthal: Oktaven, Ausnahmengruppen und Oktavengeometrie, Utrecht, 1951.

にその考えの源がある．私がこの論文を愛読した意味もあって，例外群（むしろ例外 Lie 環）の概略を知りたい人は是非一読されるようおすすめする．この他に Lie 群の表現について

〔9〕 山内恭彦-杉浦光夫：連続群論，新数学シリーズ，培風館，1960.

〔10〕 J. F. Adams: Lectures on Lie Groups, Benjamin, 1969.

〔11〕 H. Weyl: Classical Groups, Princeton Univ. Press, 1939.

の書がある．特に〔10〕は本書に関係が深くて大そう興味深い．また単連結な Lie 群の表現論は Lie 環の表現論に帰着されるので，つぎの書も参照されたい．

〔12〕 松島与三：リー環論，現代数学講座，共立出版，1957.

〔13〕 岩堀長慶：リー群論 I, II, 現代応用数学講座，岩波書店，1957.

〔14〕 N. Jacobson: Lie Algebras, Interscience, 1962.

〔15〕 ——: Exceptional Lie Algebras, Lecture Notes in Pure and Applied Math., 1971.

〔16〕 J. Tits: Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

〔17〕 H. Weyl: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen, I, II, III, Math. Zeit., 23 (1924), 24 (1925).

表現環と K 理論との関係については

〔18〕 M. F. Atiyah-F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp. Pure Math., 3, Differential Geometry, Amer. Math. Soc., 1961.

〔19〕 R. Bott: Lectures on $K(X)$, Mimeographed notes, Harvard Univ., 1962.

〔20〕 M. F. Atiyah-G. B. Segal: Equivariant K-theory, Lecture at Oxford Univ., 1965.

等数多くの論文がある．最後に本書の補題，命題のいくつかを拙書

〔21〕 横田一郎：群と位相，基礎数学選書5，裳華房，1971.

から引用したので付記しておく．

索　　引

ケ

コ

サ

シ ジ

ス

セ ゼ

ヒ

フ ブ

ヘ ベ ペ

ホ

ミ

ム

ユ

リ

ル

レ

ワ

著者略歴

1926年（大正15年）大阪府出身　旧制大阪高等学校理科甲類卒
大阪大学理学部数学科卒　大阪市立大学助手，講師，助教授を経て
現在信州大学教授（理学部数学科）理学博士

主な著述「群と位相」（基礎数学選書5．裳華房），ベクトルと
行列（共著，竹内書店），微分と積分（共著，竹内書店）

基礎数学選書 10　群 と 表 現　定価 2,900 円

昭和 48 年 5 月 1 日　第1版印刷
昭和 48 年 5 月 5 日　第1版発行 ©
昭和 57 年 12 月 20 日　第5版発行

著作者の了解により検印を省略いたします

著作者　横田一郎
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町8番地
電話 東京 262-9166～9
株式会社 裳華房
印刷所　中央印刷株式会社
製本所　株式会社 高陽堂

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1110-X

Printed in Japan